L9

środa, 9 grudnia 2020 19:47

zad. 1

$$\begin{cases} P_0 = 1 \\ P_1 = x - \beta_1 \\ P_k = (x-\beta_k)P_{k-1} + \gamma_k P_{k-2}, \quad k \geq 2 \end{cases}$$

gdzie $\beta_k = \frac{\langle xP_{k-1}, P_{k-1}\rangle}{\langle P_{k-1}, P_{k-1}\rangle}$, $\gamma_k = \frac{\langle P_{k-1}, P_{k-1}\rangle}{\langle P_{k-2}, P_{k-2}\rangle}$

$P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x - \frac{\langle xP_0, P_0\rangle}{\langle P_0, P_0\rangle}$,

ale $\langle xP_0, P_0\rangle = \int_{-a}^{a} \underbrace{p(x)\,x}_{\text{nieparzyste}} \cdot \underset{\uparrow\atop 1}{P_0^2(x)}\, dx = 0$, więc $P_1(x) = x$

Zał. że teza zachodzi dla $0, 1, \ldots, k-1$. Wtedy

$$P_k(x) = xP_{k-1}(x) - \beta_k P_{k-1}(x) - \gamma_k P_{k-2}(x)$$

Ale $\beta_k = \frac{\langle xP_{k-1}, P_{k-1}\rangle}{\|P_{k-1}\|^2}$, a $\langle xP_{k-1}, P_{k-1}\rangle =$

$$= \int_{-a}^{a} \underbrace{\underbrace{p(x)}_{\text{parzyste}}\, x\, \underbrace{P_{k-1}^2(x)}_{\text{parzyste}}}_{\text{nieparzyste}}\, dx = 0, \text{ więc } \beta_k = 0 \text{ dla } k \in \mathbb{N}$$

oraz $\gamma_k = \frac{\|P_{k-1}\|^2}{\|P_{k-2}\|^2} \neq 0$. Zatem

$$P_k(x) = xP_{k-1}(x) - \gamma_k P_{k-2}(x)$$

Widać, że teza zachodzi dla $k=2m$ oraz $k=2m+1$.

zad. 2

Weźmy dowolne $i \neq j$ naturalne. Wtedy

Weźmy dowolne $i \neq j$ naturalne. Wtedy

$$\langle S_i, S_j \rangle = \int_0^{a^2} \frac{p(\sqrt{t})}{\sqrt{t}} S_i(t) S_j(t)\, dt = \left| \begin{array}{l} t = x^2 \\ dt = 2x\, dx \end{array} \right| =$$

$$= 2\int_0^a \frac{p(x)}{x} S_i(x^2) S_j(x^2)\, x\, dx = 2\int_0^a \underbrace{p(x) S_i(x^2) S_j(x^2)}_{\text{parzyste}} dx =$$

$$= \int_{-a}^{a} p(x) S_i(x^2) S_j(x^2)\, dx = \langle P_{2i}, P_{2j} \rangle = 0$$

$$\langle R_i, R_j \rangle = \int_0^{a^2} \sqrt{t}\, p(\sqrt{t}) R_i(t) R_j(t)\, dt = \left| \begin{array}{l} x^2 = t \\ 2x dx = dt \end{array} \right| =$$

$$= 2\int_0^a x\, p(x) R_i(x^2) R_j(x^2) \cdot x\, dx = 2\int_0^a p(x) \underbrace{P_{2i+1}(x) P_{2j+1}(x)}_{\text{parzyste}} dx =$$

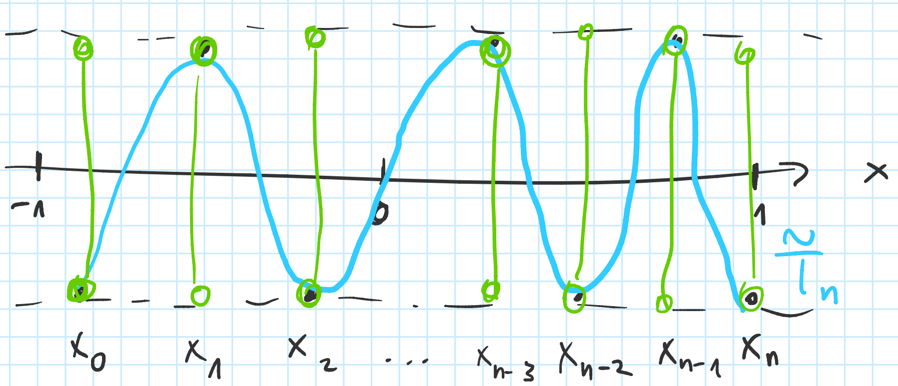
$$= 2\int_{-a}^{a} p(x) P_{2i+1}(x) P_{2j+1}(x)\, dx = \langle P_{2i+1}, P_{2j+1} \rangle = 0$$

---

zad. 3

$\frac{1}{2^{n-1}} = \|\tilde{T}_n\| < \|\tilde{T}_{n+1}\| = \frac{1}{2^n}$, więc wystarczy że pokażemy że $\tilde{T}_n$ ma min. normę wśród wielomianów stopnia $n$.

Zał. że jest taki $w(x) \in \Pi_n \setminus \Pi_{n-1}$ że $\|w\| < \|\tilde{T}_n\|$. Wtedy



$w(x_0) \in (-1,1)$, $w(x_1) \in (-1,1)$ ..., $w(x_n) \in (-1,1)$

$\Downarrow$

$q(x) = \tilde{T}_n(x) - w(x)$ ma $n$ miejsc zerowych. Ale

$q(x) = (x^n + \dots) - (x^n + \dots) \in \Pi_{n-1}$. Zatem

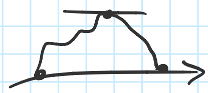
$q \equiv 0 \iff w = \tilde{T}_n$ ↯.

zad. 4

Tak naprawdę chcemy pokazać, że $w_n^* \in \Pi_n \setminus \Pi_{n-1}$.

Zał. nie wprost, że $w_n^*$ jest też $n+1$ wielomianem opt.

Zatem $f - w_n^*$ ma $n+3$ pkt. ekstremalne



$(f - w_n^*)$ ma $n+2$ pkt. zerowe

$(f - w_n^*)'$ ma $n+1$ pkt. zerowe

$\vdots$

$(f - w_n^*)^{(n+1)}$ ma $1$ miejsca zerowe

$(f - w_n^*)^{(n+1)} = f^{(n+1)} - w_n^{*(n+1)} = f^{(n+1)}$

W takim razie jest $\alpha$ t. że $f^{(n+1)}(\alpha) = 0$ ↯

zad. 5

| $x_k$ | 0 | 1 | 2 | 4 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x_k)$ | 1 | 9 | 23 | 93 | 259 |

$f(x_i) - w(x_i) = (-1)^i \lambda$, $|\lambda| = \|f - w\|$

$w(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, mamy

$w(x_i) + (-1)^i \lambda = f(x_i)$ czyli:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 & 1 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & -1 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & 1 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dots \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & 1 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^2 & -1 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dots \\ c \\ d \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}$$

$$A \circ v = u$$

$$\Downarrow$$

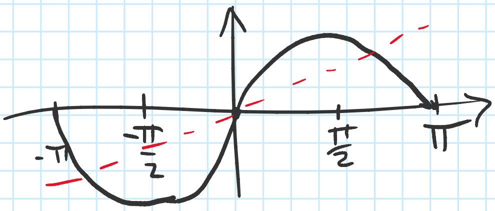
$$v = A^{-1} u$$

Po wstawieniu do Octave:

$a = 1, \quad b = 7, \quad c = 0, \quad d = 1$

zad. 6

Intuicja podpowiada, że funkcja parzysta nie będzie dobrze przybliżać funkcji nieparzystej, zatem poszukamy funkcji liniowej dla której znajdziemy czteropunktowy alternans. Poszukamy takiej dla $\sin x$ na $[-\pi, \pi]$ i potem odpowiednio odbijemy i przesuniemy.




$$w_2^*(x) = bx$$

$$f(x) - w_2^*(x) = \sin x - bx$$

$$f'(x) - w_2^{*\prime}(x) = \cos x - b = 0$$

$$\cos x = b \iff x = \operatorname{acos} b \text{ lub } x = -\operatorname{acos} b$$

Ponadto ekstrema mogą być jeszcze na brzegach i tak musi być. Zatem ekstrema będą w punktach $\{-\pi, -\operatorname{acos} b, \operatorname{acos} b, \pi\}$

$$|\sin(\operatorname{acos} b) - b \operatorname{acos} b| = |\sin \pi - b\pi| = b\pi$$

$$\left| \sin(a\cos b) - b\, a\cos b \right| = \left| \sin\pi - b\pi \right| = b\pi$$

$$\sin(a\cos b) = b(\pi + a\cos b)$$

Szukane $b = 0.2172336282\ldots$

Teraz musimy odbić naszą prostą względem osi OX i przesunąć ją w prawo o $\pi$:

$$W^*(x) = (x - \pi)\cdot(-b) = -bx + b\pi$$

Szukane wsp. to $a = 0$, $b = 0.2172336$

oraz $c = 0.68245957$