L2Z23

sobota, 14 listopada 2020 15:22

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ciągła.

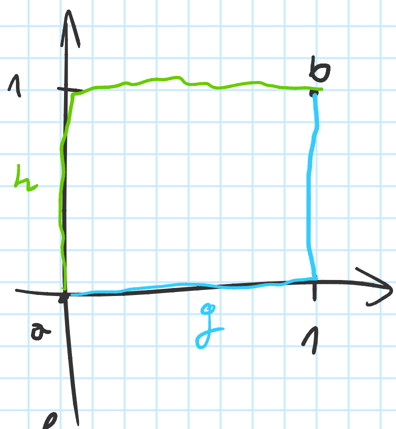
Zał. nie wprost, że f bijekcja.

Niech $f(0,0) = a$, $f(1,1) = b$, BSO $a < b$

Niech $h, g : [0,2] \to \mathbb{R}$ dane wzorem

$$h(x) = \begin{cases} f(0,x), & \text{gdy } x \in [0,1) \\ f(x-1,1), & \text{gdy } x \in [1,2] \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} f(x,0) & \text{gdy } x \in [0,1) \\ f(1,x-1) & \text{gdy } x \in [1,2] \end{cases}$$



Oczywiście g, h ciągłe z ciągłości f.

Niech teraz d t.że $a < d < b$.

Wtedy z tw. Darboux istnieje taki x_g, x_h

że $g(x_g) = h(x_h) = d$.

Ale g i h przyjmują tylko takie wartości

jak f i z zał. f różnowartościowa,

więc $x_g = x_h = 0$ lub $x_g = x_h = 2$,

i wtedy $d = g(x_g) = a < d$ lub

$d = g(x_g) = b > d$ $\lightning$

Jeśli $f : U \to \mathbb{R}$, gdzie $U \subseteq \mathbb{R}^2$ otwarte,

to zadziała analogiczny argument.