ANALIZA III - LISTA 11

Na ćwiczeniach nie robimy zadania 1.

1. Niech $\Phi(u,v) = (u-v, u+v, u)$ i D bedzie kołem jednostkowym w płaszczyźnie uv. Obliczyc pole powierzchi $\Phi(D)$.

2. Obliczyc pole powierzchni helikoidy $\Phi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, \theta)$, $0 \leq r \leq 1$ i $0 \leq \theta \leq 4\pi$.

3. Obliczyc pole powierchni torusa $x = (R + r\cos\varphi)\cos\psi$, $y = (R + r\cos\varphi)\sin\psi$, $z = r\sin\varphi$, gdzie $\varphi, \psi \in [0, 2\pi]$. Co by sie stało, gdyby dopuścić $\varphi, \psi \in [0, 4\pi]$?

4. Obliczyc pole powierzchi fragmentu sfery jednostkowej wyciętego przez stożek $\sqrt{x^2+y^2} \leq z$.

5. Znaleźć parametryzację powierzchni $x^2 - y^2 = 1$, gdzie $x > 0$, $-1 \leq y \leq 1$ i $0 \leq z \leq 1$. Wyrazić pole powierzcni za pomoca całki.

6. Znaleźć pole powierzchni wykresu funkcji $f(x,y) = \frac{2}{3}\left(x^{3/2} + y^{3/2}\right)$, leżącego ponad kwadratem $[0,1] \times [0,1]$.

7. Obliczyć pole powierzchni określonej przez $x + y + z = 1$, $x^2 + 2y^2 \leq 1$.

8. Obliczyć $\iint_S xy\, dS$, gdzie S jest powierzchnią czworościanu o ścianach $z = 0, y = 0, x + z = 1$ i $x = y$.

9. Obliczyć $\iint_S z\, dS$, gdzie S jest górna półsferą o promienu a.

10. Obliczyć $\iint_S xyz\, dS$, gdzie S jest trójkatem o wierchołkach $(1,0,0), (0,2,0), (0,1,1)$.

11. Obliczyć $\iint_S z\, dS$, gdzie S jest powierzchnią $z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 \leq 1$.

12. Obliczyć $\iint_S z^2\, dS$, gdzie S jest brzegiem sześcianu $[-1,1] \times [-1,1] \times [-1,1]$.

13*. Obliczyć masę sfery o promieniu R, gdzie gęstość masy w punkcie (x,y,z) jest równa odległości tego punktu od ustalonego punktu (x_0, y_0, z_0) tej sfery. *Wsk. Masa, to całką powierzchniową z gęstości. Wybrać właściwe współrzędne.*

14. Metalowa powłoka S ma kształt górnej półsfery o promieniu R. Gęstość masy w (x,y,z) wynosi $\rho(x,y,z) = x^2 + y^2$. Znaleźć całkowitą masę S.

15. Znaleźć środek masy części sfery o promieniu R leżącej w pierwszym oktancie, przy założeniu, że masa jest proporcjonalna do powierzchni. Wsk. środek masy to punkt

$$\frac{1}{\iint_S dS}\left(\iint_S x\, dS, \iint_S y\, dS, \iint_S z\, dS\right).$$

16. Niech $v, u \in \mathbb{R}^3$, a R będzie równoległobokiem wyznaczonym przez $0, u, v$. Pokaż, ze pole równoległoboku $A(R) = \|u \times v\|$.

17. Załóżmy, że temperatura w punkcie powierzchni jest dana wzorem $T(x, y, z) = 3x^2 + 3z^2$. Obliczyć przepływ ciepła przez powierzchnię $x^2 + z^2 = 2$, $0 \leq y \leq 2$, przy $k = 1$. Wsk. Przepływ ciepła to całka zorientowana $\iint_S (-k\nabla T) \circ dS$.

18. Obliczyć przepływ ciepła przez sferę jednostkową, jeśli $T(x, y, z) = x$. Podać interpretację fizyczna wyniku.

19. Niech S będzie powierzchnią zamkniętą złożoną z górnej półsfery jednostkowej i jej podstawy $x^2 + y^2 \leq 1$, $z = 0$. Niech $E(x, y, z) = (2x, 2y, 2z)$ będzie polem elektrycznym w R^3. Obliczyć strumień elektryczny przez S. Wsk. można liczyć strumień elektryczny $\iint_S E \circ dS$ niezależnie po górnej półsfery jednostkowej i po jej podstawie.

20. Silna jednostajna ulewa powoduje przepływ wody zgodnie z polem wektorowym $F(x, y, z) = (0, 0, -1)$. Znaleźć całkowity przepływ przez powierzchnię boczną stożka $z = \sqrt{x^2 + y^2}, x^2 + y^2 \leq 1$. Wsk. przepływ to $\iint_S F \circ dS$.

21. Mocny wiatr powoduje, że deszcz z zadania 23 zaczyna padać pod kątem 45° i jest opisany polem wektorowym $F(x, y, z) = -(\sqrt{2}/2, 0, \sqrt{2}/2)$. Jaki jest teraz przepływ wody przez powierzchnię boczną stożka $z = \sqrt{x^2 + y^2}, x^2 + y^2 \leq 1$.