zad. 8** lista 1

Weźmy dowolny ciąg $x_n \in \underset{\text{zwarte}}{D} \subset \mathbb{R}^n$

Z ograniczoności D wiemy, że jest takie r, że nieskończenie wiele punktów x_n zawiera się w $B(x_1, r)$.

Zauważmy, że musi istnieć taki punkt $x_i \in B(x_1, r)$, że w $B(x_i, \frac{r}{2})$ jest nieskończenie wiele punktów z x_n. To wynika z ograniczoności $B(x_1, r)$ → gdyby nie było takiego punktu, to znaczyłoby, że ~~dla~~ jest taki nieskończony podciąg $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots \in B(x_1, r)$ t. że $B(x_{i_j}, \frac{r}{2}) \cap B(x_{i_{j'}}, \frac{r}{2}) = \emptyset$ dla ~~dowolnych~~ wszystkich j, j', ale to by znaczyło, że są tam jakieś dwa punkty oddalone od siebie o dowolnie dużą odległość.

W podobny sposób wśród tych nieskończenie wiele punktów zawartych w $B(x_i, \frac{r}{2})$ możemy znaleźć taki punkt x_j, że ∞ wiele punktów leży w $B(x_j, \frac{r}{4})$. Możemy to kontynuować w nieskończoność, i dostaniemy zbieżny podciąg x_n. Z domkniętości D wiemy, że ten punkt leży w D, stąd teza twierdzenia.

■

Zad. 9^{**} Lista 1 $K \subset \mathbb{R}^n$ a zwarty $f: K \to \mathbb{R}$ ciągła

~~Z ciągłości wynika, że zb obraz~~

Pokażemy najpierw, że dla dowolnej rodziny zbiorów otwartych $\mathcal{U}$ t. że $K \subseteq \bigcup \mathcal{U}$ możemy wybrać skończony $\mathcal{U}$ t. że K zawiera się w ich sumie. W tym celu pokażemy tzw. tw. Lebesgue'a, tj: że możemy znaleźć taką liczbę $\delta > 0$ że dla dowolnego $x \in K$ kula $B(x, \delta)$ zawiera się w pewnym zbiorze z $\mathcal{U}$.

Przypuśćmy, że takie δ nie istnieje. Wtedy możemy dla każdego $n \geqslant 1$ wybrać taki punkt $x_n \in K$, że $B(x_n, \frac{1}{n})$ nie leży w żadnym zbiorze z $\mathcal{U}$.

Ustalmy $x \in K$, $U \in \mathcal{U}$ t. że $x \in U$ oraz $r > 0$ t. że $B(x, r) \subset U$. Jeśli jakieś $x_n \in B(x, \frac{r}{2})$, to $B(x_n, \frac{r}{2}) \subset U$ i z założenia $\frac{1}{n} \geqslant \frac{r}{2}$. Stąd dla $n \geqslant \frac{2}{r}$ mamy $x_n \notin B(x, \frac{r}{2})$, a stąd ciąg x_n nie ma podciągu zbieżnego do x. Z dowolności wyboru x mamy, że x_n nie ma podciągu zbieżnego, a to jest sprzeczne z założeniem, że K jest zwarte.

Pokażemy teraz, że K ma skończone pokrycie w $\mathcal{U}$. Niech δ będzie liczbą Lebesgue'a dla K i pokrycia $\mathcal{U}$. Załóżmy niewprost, że w $\mathcal{U}$ nie ma skończonego pokrycia K.

Możemy zatem wybrać taki podciąg $x_n \in K$, że $x_n \notin \bigcup_{m<n} B(x_m, \delta)$ (każda kula $B(x, \delta)$ zawiera się w jakimś zbiorze z $\mathcal{U}$)

Dla $m<n$ mamy $\|x_m - x_n\| \geqslant \delta$, a zatem kula $B(x, \frac{\delta}{2})$ zawiera co najwyżej jeden element z ciągu x_n (dla dowolnego x), a zatem nie ma takiego x, że x_n ma podciąg zbieżny do x co znów jest sprzeczne z zał. o zwartości K.

Stąd natychmiast wynika ograniczoność K. Z pokrycia $\{B(x, \delta) \mid x \in K\}$ możemy wybrać skończone pokrycie K, a suma skończenie wielu takich kul jest ograniczona.

Pokażemy teraz, że dla $f: K \to \mathbb{R}$ ciągłej otrzymamy $f[K]$ ~~og~~ zwarte.
Wybierzmy ze zbioru $\{ \underset{\uparrow \text{ otwarte}}{f^{-1}(U)} \mid \underset{\uparrow \text{ otwarte}}{U} \subseteq \underset{\uparrow \text{ otwarte}}{\mathbb{R}} \}$ skończone pokrycie K, niech to będą zbiory $f^{-1}(U_1), \dots f^{-1}(U_n)$. Wówczas

$$f[K] \subseteq U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_n$$

, ale $\{f^{-1}(U) \mid U \subseteq \mathbb{R}\}$ zawiera dowolną rodzinę pokrywającą $f[K]$ więc $f[K]$ również zwarte, a stąd od razu widać, że $\sup f(K) = f(a)$, $\inf f(K) = f(b)$ dla pewnych $a, b \in K$ (z ograniczoności i domkniętości $f[K]$), więc są też minimum i maksimum. ■

zad. 32** Lista 1 $x_i, a_i > 0$, $p > 1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

Tw: $\sum_{i=1}^n a_i x_i \le \left(\sum_{i=1}^n x_i^{q}\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$

Niech $X = \sum_{i=1}^n (x_i^p)$. Wybierzmy dowolne a_i, będziemy chcieli maksymalizować lewą stronę.

Niech $f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n a_i x_i$. opa R

Szukamy $\max f$ pod warunkiem, że $\sum_{i=1}^n x_i^p = X$

na zbiorze zwartym $M = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in [0, X^{\frac{1}{p}}]\}$.

Zał. najpierw, że $x_i > 0$.

Wtedy z tw. Lagrange'a

$$\nabla f(x_1, \dots, x_n) = (a_1, a_2, \dots, a_n) = \lambda(p x_1^{p-1}, \dots, p x_n^{p-1})$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} a_1 = \lambda p x_1^{p-1} \\ \vdots \\ a_n = \lambda p x_n^{p-1} \\ X = x_1^p + \dots + x_n^p \end{cases}$$

$$\Updownarrow \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1 \Leftrightarrow q(p-1) = p$$

$$\begin{cases} x_1^p = \left(\frac{a_1}{\lambda p}\right)^q \\ \vdots \\ x_n^p = \left(\frac{a_n}{\lambda p}\right)^q \\ X = x_n^p + \dots + x_n^p \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$X^{\frac{1}{q}} \lambda p = (a_1^q + \dots a_n^q)^{\frac{1}{q}}$$

Stąd mamy

$$x_j^p = \frac{X a_j^q}{a_1^q + \dots + a_n^q}$$

Stąd $x_j a_j = \left(\frac{X a_j^{q+p}}{a_1^q + \dots + a_n^q}\right)^{\frac{1}{p}} = \frac{X^{\frac{1}{p}} a_j^q}{\left(a_1^q + \dots + a_n^q\right)^{\frac{1}{p}}}$

a stąd

$$\max_{\bar{x} \in M} f = \sum_{i=1}^{n} x_i a_i = \frac{X^{\frac{1}{p}} \cdot \left(a_1^q + \dots a_n^q\right)}{\left(a_1^q + \dots + a_n^q\right)^{\frac{1}{p}}} = X^{\frac{1}{p}}\left(a_1^q + \dots + a_n^q\right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Gdy np. $x_1 = 0$, to albo $x_2, x_3, \dots, x_n > 0$ i wtedy wartości f wynosi $X^{\frac{1}{p}}\left(a_2^q + \dots + a_n^q\right)^{\frac{1}{q}} < X^{\frac{1}{p}}\left(a_1^q + \dots + a_n^q\right)^{\frac{1}{q}}$, albo $x_2 < 0$, ale to nas prowadzi do prostej indukcji, która pokazuje, że gdy $x_i > 0$ dla wszystkich i, to f przyjmuje maksimum, a to kończy dowód.

zad. 33** Lista 1

max $f(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} x_i$ pod warunkiem, że $\underline{\sum_{i=1}^{n} x_i = A}$.

Jesteśmy zamknięci w zwartym zbiorze

$$K = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in [0, A]\}.$$

$$\nabla f(x_1, \dots, x_n) = (\hat{x}_1 x_2 \dots x_n, x_1 \hat{x}_2 \dots x_n, \dots, x_1 x_2 \dots \hat{x}_n) =$$

$$= \lambda(1, 1, \dots, 1)$$

$$\begin{cases} x_2 x_3 \dots x_n = \lambda & (1) \\ x_1 x_3 \dots x_n = \lambda & (2) \\ \vdots & \vdots \\ x_1 x_2 \dots x_n = \lambda & (n) \\ x_1 + \dots + x_n = A & (n+1) \end{cases}$$

Widać, że $x_i \neq 0$ dla $i = 1, \dots, n$. jeśli szukamy maksimum.

z $(1),(2) \to \frac{x_1}{x_2} = 1$, $(2),(3) \to \frac{x_2}{x_3} = 1$, ..., $(n),(1) \to \frac{x_n}{x_1} = \underline{1}$

$$\Downarrow$$

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n$$

$$n x_1 = A \Rightarrow x_1 = \frac{A}{n}$$

$$\Downarrow$$

$$x_1 x_2 \dots x_n \leq \max f = \left(\frac{A}{n}\right)^n = \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right)^n$$