Franciszek Malinka

zad. 1 Niech $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^3$ będzie otwartym podzbiorem. Wtedy możemy zapisać, że $\mathcal{U} = \bigcup \mathcal{B}$, gdzie $\mathcal{B}$ jest rodziną przeliczalnie wielu kul.

$x + \mathcal{U} = x + \bigcup \mathcal{B} = \cancel{x+} \bigcup_{B \in \mathcal{B}} \underbrace{x + B}_{\text{kula ale przesunięta}}$, a to też jest otwarte.

Podobnie niech ~~$X \setminus F$~~ $\mathbb{R}^3 \setminus \underset{\mathbb{R}^3}{\overset{\cap}{F}}$ otwarte.

Wtedy $\mathbb{R}^3 \setminus F = \bigcup \mathcal{B}$ dla pewnej rodziny kul $\mathcal{B}$. Stąd $\mathbb{R}^3 \setminus (x + F) =$

$= \cancel{\{(a,b,c) \mid a,b,c \in \mathbb{R}^3 \wedge \ldots\}} \{ y \mid y \in \mathbb{R}^3 \wedge y \notin x + F \} =$

$= \{ y \mid y \in \mathbb{R}^3 \wedge y - x \notin F \} = x + (\mathbb{R}^3 \setminus F) =$

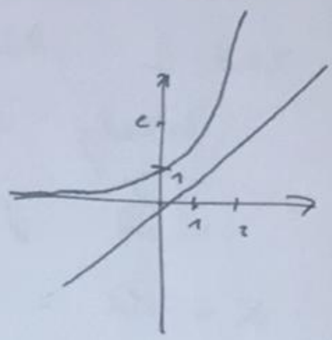
$= x + \bigcup \mathcal{B} = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} \underbrace{x + B}_{\text{przesunięta kula}}$, a to jest otwarte, więc $x + F$ domknięte.

ODW 2

Niech $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dany wzorem $f(y) = \cancel{x+} y - x$. Wtedy obraz otwartego $\mathcal{U}$ $f[\mathcal{U}] = x + \mathcal{U}$ otwarty oraz obraz domkniętego F $f[F] = x + F$ domknięty, a f jest ciągła z oczywistych względów.

zadanie. 2

$$F(x,y,z) = x + y - \frac{z^2}{2} + e^x - e^y + e^z - 3 = 0$$



$$\frac{\partial}{\partial z} F = -z + e^z \neq 0 \Rightarrow z \neq e^z \Leftarrow z \in \mathbb{R}.$$

Zatem z daje się rozwikłać zawsze.

Zastosujemy różniczkowanie niejawne do policzenia pochodnych $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 1 - z\frac{\partial z}{\partial x} + e^x + e^z \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{e^x + 1}{e^z - z}$$

Jeszcze raz:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 - z\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + e^x + e^z \cdot \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + e^z\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(e^z - z\right) + e^x + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\left(e^z - 1\right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{e^x + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\left(e^z - 1\right)}{e^z - z}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 1 - z\frac{\partial z}{\partial y} - e^y + e^z\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{e^y - 1}{e^z - z}$$

W punkcie $(1,1,0)$ otrzymujemy $\frac{\partial z}{\partial x} = -(e+1)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -1$, $\frac{\partial z}{\partial y} = e - 1$

zad. 4 $\quad S := \{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = 1\}$ $\quad$ Tw.: $1 \geq \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^4\right)^{\frac{1}{4}} \geq \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{4}}$

$$\Updownarrow$$

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^4 \geq \frac{1}{n}$$

$|x_k| \leq 1 \Rightarrow x_k^2 \geq x_k^4$ dla każdego k.

Stąd prosto

$$1 = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)^{\frac{1}{4}} \geq \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^4\right)^{\frac{1}{4}}$$

~~Użyjmy mnożników Lagrange'a.~~

$$\cancel{f(x) = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^4\right)^{\frac{1}{4}}, \quad g(x) = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = 1}$$

Załóżmy nie wprost, że $\sum_{k=1}^{n} x_k^4 < \frac{1}{n}$.

Wtedy dla dowolnego k $\quad x_k^4 < \frac{1}{n} \Leftrightarrow x_k^2 < \frac{1}{n^2}$

ale wtedy $\sum_{k=1}^{n} x_k^2 < \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} \leq 1$ ↯

■

Zad. 3 $f(x,y,z) = |x|yz$ pod warunkiem, że

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 3x^2 + 3y^4 + 4z^6 \leq 22\}$$

S jest zbiorem zwartym, więc f osiąga na nim swoje kresy. Oczywiście w poszukiwaniu maksimum chciałoby się, żeby $3x^2 + 3y^4 + 4z^6 = 22$, ale ze względu na to, że x, y, z występują w parzystych potęgach, to samo tyczy się też minimum (chcielibyśmy minimalizować y lub z, ale w kontekście tego równania wychodzi na to samo). Możemy zatem skorzystać z mnożników Lagrange'a: $f(x,y,z) = xyz$ dla $x \geq 0$,

i możemy założyć, że $x > 0$. Gdy $x = 0$, to $f(x,y,z) = 0$, gdy $x < 0$ to tak samo jakby $x > 0$ przez moduł oraz dlatego że w $g(x,y,z) = 3x^2 + 3y^4 + 4z^6$ występuje w parzystej potędze.

$$\nabla f(x,y,z) = (yz, xz, xy) = \lambda \nabla g(x,y,z) = \lambda(6x, 12y^3, 24z^5)$$

$$\nabla f(x,y,z) = (yz,\ xz,\ yx) = \lambda' \nabla g(x,y,z) = \lambda'(6x,\ 12y^3,\ 24z^5) =$$

$$= \lambda(x,\ 2y^3,\ 4z^5)$$

$\lambda \neq 0,\ x > 0 \Rightarrow y, z \neq 0$

$$\begin{cases} yz = \lambda x \\ xz = \lambda 2y^3 \\ yx = \lambda 4z^5 \\ 3x^2 + 3y^4 + 4z^6 = 22 \end{cases}$$

$$\frac{yz^2}{\lambda} = \lambda 2y^3 \Rightarrow z^2 = \lambda^2 2y^2$$

$$\frac{y^2z}{\lambda} = \lambda 4z^5 \Rightarrow y^2 = \lambda^2 4z^4$$

$$\frac{z^2}{\lambda^2 2} = \lambda^2 4z^4$$

$$\Downarrow$$

$$1 = \lambda^4 8z^2$$

$$\Downarrow$$

$$z^2 = \frac{1}{\lambda^4 \cdot 8}$$

$$\Downarrow$$

$$y^2 = \frac{\frac{1}{\lambda^4 8}}{2\lambda^2} = \frac{1}{16\lambda^6}$$

$$\Downarrow$$

$$\lambda^2 x^2 = \frac{1}{16\lambda^6} \cdot \frac{1}{\lambda^4 8} = \frac{1}{128\lambda^{10}}$$

$$\Downarrow$$

$$x^2 = \frac{1}{128\lambda^{12}}$$

$$\frac{3}{128\lambda^{12}} + \frac{3}{256\lambda^{12}} + \frac{4 \cdot 1}{\underset{128}{512}\lambda^{12}} = 22$$

$$\Updownarrow$$

$$6\frac{1}{\lambda^{12}} + 3 \cdot \frac{1}{\lambda^{12}} + 2\frac{1}{\lambda^{12}} = 22 \cdot 256$$

$$11 = 22\lambda^{12} \cdot 256$$

$$\lambda^{12} = \frac{1}{2 \cdot 256} = \frac{1}{2^9}$$

$$x^{12} = \frac{1}{2^9} \Rightarrow x^2 = \frac{2^3}{128} = 4,$$

$$y^2 = \frac{2^{\frac{9}{2}}}{2^4} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

$$z^2 = \frac{2^3}{2^3} = 1$$

Maks f przyjmuje gdy y, z tego samego znaku

i wynosi $4\sqrt{2}$

Minimum f przyjmuje gdy $y < 0$ ALBO $z > 0$

i przyjmuje $-4\sqrt{2}$