Wykład 6'.

Grupy abelowe

$G = (G, +, 0)$: grupa abelowa (stałe założenie)
(notacja addytywna)

$\mathbb{P}$: zb. liczb pierwszych

p : l. pierwsza

Przykłady gp abelowych:

- grupy cykliczne
- podgrupa i obraz homomorficzny grupy cyklicznej [abelowej] jest (gpą) cykliczną [abelową].
- produkt dowolnej liczby grup abelowych jest grupą abelową.

Def. 6.1. Załóżmy, że G : abelowa oraz $\{G_i\}_{i\in I}$: rodzina podgrup grupy G.

$G = \bigoplus_{i\in I} G_i$, gdy:
"G jest sumą prostą podgrup G_i, $i \in I$"

$\forall g \in G \quad g = \sum_{i\in I} \underset{G}{\overset{\in}{g_i}}$, ta suma jest skończona (tzn: $g_i = 0$ dla prawie wszystkich $i \in I$)

i to przedstawienie g jest jednoznaczne.

Def. 6.2.

$G_p = \{x \in G : \mathrm{ord}(x) = p^n$ dla pewnego $n \geqslant 0\}$.

p-prymarna składowa gpy G

Uwaga 6.3. $G_p < G$.

Def. 6.4. (a) $x \in G$ jest torsyjny, gdy $\mathrm{ord}(x) < \infty$.

(b) G jest beztorsyjna, gdy $(\forall\, x \in G)\ \mathrm{ord}(x) = \infty$
$\quad x \neq 0$

(c) $G_t = \{g \in G : \mathrm{ord}(g) < \infty\}$ część torsyjna G,

$G_t < G$ (ćw.)

(d) G jest torsyjna $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ $G = G_t$.

Tw. 6.5. Zał. że G : torsyjna abelowa. Wtedy

$$G = \bigoplus_{p \in \mathbb{P}} G_p$$

D-d.

1. $G = \sum_{p \in \mathbb{P}} G_p$ tzn. $\forall g \in G\ \ g = \sum_{p \in \mathbb{P}} \underset{\in}{g_p}$ (suma skończona), $g_p \in G_p$

dowód:

teza: $(\forall\, g \in G)\,(\mathrm{ord}(g) = k = p_1^{n_1} \cdots p_l^{n_l} \Rightarrow g \in G_{p_1} + \ldots + G_{p_l})$
$\quad g \neq 0$, $\quad p_1, \ldots, p_l \in \mathbb{P}$ różne

d-d indukcja względem $l > 0$.

- $l = 1$: OK.
- krok indukcyjny $l \longrightarrow l+1$.

Niech $g \in G$ t.że $\operatorname{ord}(g) = k = p_1^{n_1} \cdots p_{l+1}^{n_{l+1}}$, $n_i \geq 0$.

Niech $n = p_1^{n_1} \cdots p_l^{n_l}$, $m = p_{l+1}^{n_{l+1}}$.

n, m : względnie pierwsze $\Longrightarrow k_1 n + k_2 m = 1$

dla pewnych $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$

(dowód później na wykładzie)

$$w\ G: \quad k_1 n g + k_2 m g = 1 \cdot g = g$$

ale : $\operatorname{ord}(ng) = \frac{k}{n}$, $\operatorname{ord}(mg) = \frac{k}{m}$, więc

z zał. ind.

$$ng \in G_{p_{l+1}} \quad i \quad mg \in G_{p_1} + \ldots + G_{p_l}$$

$$\Downarrow$$

$$g \in G_{p_1} + \ldots + G_{p_l} + G_{p_{l+1}}$$

2. Jednoznaczność rozkładu (przedstawienia) g:

Zał., że

$$G \ni g = \sum_p g_p = \sum_p h_p, \quad g_p, h_p \in G_p, \ p \in \mathbb{P}$$

i zał. nie wprost, że $g_{p_0} \neq h_{p_0}$ dla pewnego $p_0 \in \mathbb{P}$.

Stąd:

$$0 \neq x := g_{p_0} - h_{p_0} = \sum_{p \neq p_0} (h_p - g_p) \in G_{p_1} + \ldots + G_{p_l}$$

$x \in G_{p_0} \Rightarrow \operatorname{ord}(x) = p_0^{m_0}$, $m_0 \neq 0$

$\Downarrow$ ($p_1, \ldots, p_l$ różne od p_0)

↯. $\operatorname{ord}(x) = p_1^{m_1} \cdots p_l^{m_l}$

Def 6.6. G: <u>wolna grupa abelowa</u>, gdy

$$G = \bigoplus_{i \in I} G_i, \text{ gdzie każde } G_i \cong (\mathbb{Z}, +).$$

$|I|$: "ranga G".

~~Wtedy~~ Lemat 6.7. Zał., że $f: G \xrightarrow{\text{epi}} S$ ← wolna grupa abelowa.

Wtedy istnieje $H < G$ t. że

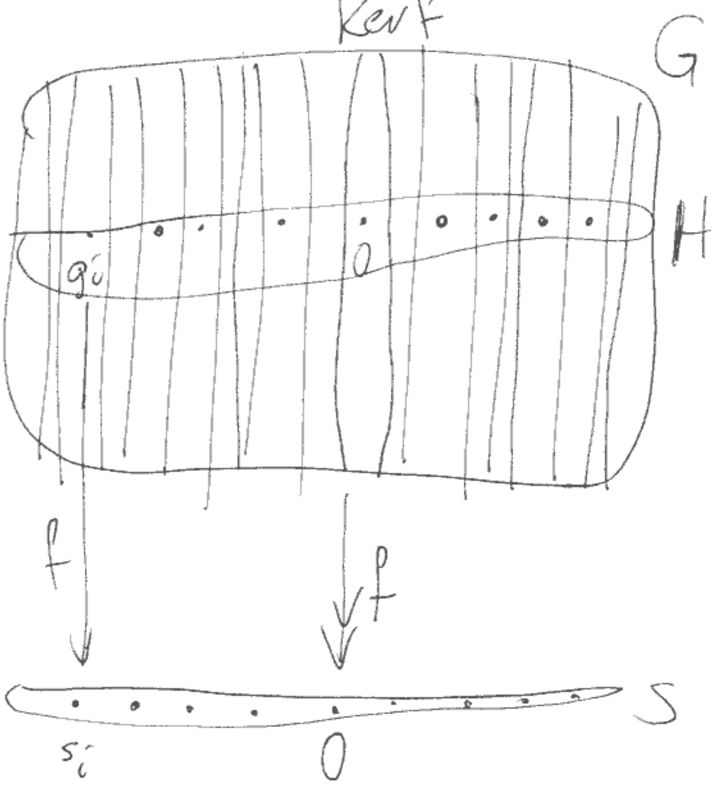
$$f|_H : H \xrightarrow{\cong} S \quad i \quad G = H \oplus \operatorname{Ker} f$$

Uwaga 6.6'. G: grupa. Wtedy G: wolna gpa abelowa rangi skończonej $\iff G \cong (\mathbb{Z}^n, +)$ dla pewnego $n > 0$, $n \in \mathbb{N}$.

D-d. $S = \bigoplus_{i\in I} S_i$, $\underset{\underset{(s_i)}{\parallel}}{S_i} \cong (\mathbb{Z}, +)$.

Niech $g_i \in G$ t. że $f(g_i) = s_i$ dla wszystkich $i \in I$.

Niech $H = \sum_{i\in I} \mathbb{Z} g_i = \langle g_i : i \in I \rangle < G$.



- $H \cap \operatorname{Ker} f = \{0\}$

bo:

$0 = f(\sum_{i\in I} n_i g_i) = \sum_{i\in I} n_i s_i$

$\Downarrow$

$n_i = 0$ dla wszystkich $i \in I$.

- $f\restriction_H : H \xrightarrow{\cong} S$ i $H = \bigoplus_{i\in I} \mathbb{Z} g_i$
- $H + \operatorname{Ker} f = G$ i $H \cap \operatorname{Ker} f = \{0\}$

ćw.

$\Downarrow$

$G = H \oplus \operatorname{Ker} f$.

<u>Tw</u>. Zał. że $A = \mathbb{Z}s_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}s_n$

wolna grupa abelowa

$0 \neq s_i \in A$

oraz $G < A$.

Wtedy G: wolna grupa abelowa rangi $\leq n$.

<u>D-d</u> Indukcja wzgl. n.

$n = 0$, $n = 1$: OK.

<u>Krok indukcyjny</u>. Zał, że $n > 1$ i dla wszystkich $\overset{\vee}{n'}$ teza zachodzi.

Niech $f : A \longrightarrow \mathbb{Z}s_1$ rzut na 1. współrzędną.

tzn. $f(m_1 s_1 + \ldots + m_n s_n) = m_1 s_1$ $\quad (m_i \in \mathbb{Z})$.

Niech $K = \operatorname{Ker} f \cap G$.

$\operatorname{Ker} f = \mathbb{Z}s_2 \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}s_n$ wolna gpa abelowa rangi $\cancel{\leq} n-1$.

$\wedge$

$K \underset{\text{zał. ind.}}{\Longrightarrow} K$ wolna gpa abelowa rangi $\leq n-1$.

z ~~lematu 6.9: istnieje~~

$f_1 := f\restriction_G : G \longrightarrow \mathbb{Z}s_1$ więc $f_1[G] \leq \mathbb{Z}s_1$ wolna gpa abelowa rangi ≤ 1.

$\Downarrow$.

$$f_1 : G \twoheadrightarrow f[G] < \mathbb{Z}s_1 \;, \; K = \operatorname{Ker} f_1$$

z lematu 6.9 istnieje $H < G$ t. że

$$f_1 \restriction_H : H \xrightarrow{\cong} f[G] \quad i$$

$$G = H \oplus K$$

wolne gpy abelowe $\Rightarrow$ G : wolna gpa abelowa rangi $\leq n$.

rangi : $H : \leq 1$, $K : \leq n-1$

~~Uwaga~~ Wniosek. 6.9. Ranga wolnej grupy abelowej jest poprawnie określona (każde dwie bazy mają tę samą moc).

<u>TW</u>. 6.10. G : skończona gpa abelowa $\Rightarrow$

$$G = \bigoplus_{i \in I} G_i \leftarrow \text{cykliczne}$$

bez dowodu.

gdy $|I| < \aleph_0$, to $\bigoplus_{i \in I} G_i \cong \prod_{i \in I} G_i = \sum_{i \in I} G_i$

gdy $|I|$ dowolne to $\bigoplus_{i \in I} G_i = \underbrace{\sum_{i \in I} G_i < \prod_{i \in I} G_i}_{\text{abstrakcyjny produkt prosty i suma prosta}}$

Lemat 6.11.

G: skończ. generowana, abelowa, beztorsyjna $\Rightarrow$

G: wolna gpa abelowa skończonej rangi.

D-d

bso $\{0\} \neq G = \langle S \rangle$, S skończony $\subseteq G$.

Niech $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq S$ max. lin. niezależny / $\mathbb{Z}$

$\underbrace{(\text{tzn: } \sum m_i x_i = 0 \Rightarrow m_1 = \ldots = m_n = 0)}_{(*)}$, $m_i \in \mathbb{Z}$.

Niech $H = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle < G$.

(*) $\Rightarrow$ H wolna gpa abelowa, $H = \mathbb{Z}x_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}x_n$.

Niech $y \in S$ dowolne. z maksymalności $\{x_1, \ldots, x_n\}$:

istnieje $\underbrace{m_y \in \mathbb{Z} \text{ i } m_1, \ldots, m_n \in \mathbb{Z}}_{\text{nie wszystkie } = 0}$ t. że

$$m_y y + m_1 x_1 + \ldots + m_n x_n = 0$$

$m_y \neq 0$ (bo (*))

Niech $m = \prod_{y \in S} m_y$. Wtedy $\forall g \in G \; mg \in H$.

$$\left(\text{bo: } g = \sum_{y \in S} k_y y \Rightarrow mg = \sum_{y \in S} \overbrace{k_y m y}^{\in H}\right).$$

Określamy

$$f : G \xrightarrow{\text{homo}} H \quad . \quad \ker f = \{0\}$$
$$g \xmapsto{f} mg \qquad\qquad \Downarrow$$
$$f : 1-1$$

Stąd $f : G \xrightarrow{\cong} \operatorname{Im} f < H$ — wolna gpa abelowa

$\Downarrow$ 6.8

$\operatorname{Im} f$ wolna gpa abelowa

$\Downarrow$

G — // —.

TW. 6.12.

G : abelowa, skończ. generowana $\Rightarrow G = \bigoplus_{i \in I} G_i \leftarrow$ cykliczne

$|I| < \aleph_0$.

<u>D-d</u> (a) G_t skończenie generowana, bo:

niech $\{g_1, \dots, g_n\} \subseteq G$

zbiór generujący G

Niech $F : (\mathbb{Z}^n, +) \xrightarrow{\text{epi}} G$

$$F(k_1, \dots, k_n) = \sum_i k_i g_i$$

$$F^{-1}[G_t] < (\mathbb{Z}^n, +)$$

tw. 6.8 $\Rightarrow \Downarrow$

$$\underbrace{F^{-1}[G_t]}_{} \cong (\mathbb{Z}^k, +) \text{ dla pewnego } k \leq n$$

$\Downarrow$ skończenie generowana

więc $G_t = F[F^{-1}[G_t]]$ też skończ. generowana

Skoro G_t: torsyjna i skończ. generowana,

to G_t: skończona.

(b) G_t: skończona $\underset{6.10}{\Longrightarrow}$ $G_t = \bigoplus$ gpy cykliczne (skończ. suma)

(c) G/G_t beztorsyjna, skończ. generowana (ćw.) $\underset{6.11}{\Longrightarrow}$

G/G_t: wolna gpa abelowa (skończ. rangi)

(d) $G \xrightarrow[\text{ilorazowe}]{j} \underbrace{G/G_t}_{\text{wolna abelowa}}$ $\quad \ker j = G_t$

z 6.7: istnieje $H < G$ t.że

$j|_H : H \xrightarrow{\cong} G/G_t$ i $G = H \oplus G_t$

H: wolna ab. skończ. rangi; G_t: $\bigoplus$ cykliczne

$G = \bigoplus$ cykliczne.

<u>Grupy wolne idea:</u>

Dany zbiór X. Jaka jest "największa grupa G generowana przez X"?

· np. jeśli $G = (G, \cdot)$ oraz $a, b, c \in X$,
$\quad\ \ \cup\!\!|$
$\quad\ \ X$

to $\underbrace{ab\bar{a}ccb}$ $\in G$

wyrażenie algebraiczne w języku grup — konkretny element G.

· różne wyrażenia mogą oznaczać ten sam element.

· np. gdy $G = \{e\}$, to wszystkie wyrażenia mają wartość e w tej konkretnej grupie X.

· $\underline{ba\bar{a}aa\bar{a}} = \underline{ba}$ w $\underline{\text{każdej}}$ grupie G t. że $X \subseteq G$.

$ba\bar{a}aa\bar{a}$: słowo skracalne; ba: słowo nieskracalne.

· $F(X) = F_X$ = grupa wolna o wolnym zb. generatorów X

= grupa złożona ze słów nieskracalnych nad X.

Podejście bardziej algebraiczne:

Zał, że F: grupa, $X \subseteq F$

Def. 7.1. (1) X jest zbiorem wolnych generatorów grupy F, gdy

$$\forall G\ \forall f: X \longrightarrow G\ \exists!\ \underset{f}{\overset{f'}{\cup\!\shortmid}} : F \longrightarrow G \text{ homomorfizm}$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\subseteq"'] \arrow[dr, phantom, "\#"] & G \\ F \arrow[ur, dashed, "f'"'] & \end{tikzcd}$$

(2) F jest grupą wolną, gdy ma ~~wolny~~ zbiór wolnych generatorów.

(3) (Ranga grupy wolnej F) $= |X|$, gdzie $X \subseteq F$ zb. wolnych generatorów.

(poprawnie określone... zad. później)

Uwaga 7.2. Jeśli X: zbiór wolnych generatorów grupy F, to $\langle X \rangle = F$.

D-d. Niech $F_0 := \langle X \rangle < F$.

$$(0)\quad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "{\overset{\mathrm{id}_X}{\overset{\shortparallel}{f}}}"] \arrow[d, "\subseteq"'] \arrow[dr, phantom, "\#"] & F_0 \\ F \arrow[ur, dashed, "\exists f'"'] & \end{tikzcd}$$

tzn. $f \subseteq f'$

$F_0 \subseteq F$ i $f' : F \longrightarrow F$ również

$$(1)\quad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "{\overset{\mathrm{id}_X}{\overset{\shortparallel}{f}}}"] \arrow[d, "\subseteq"'] \arrow[dr, phantom, "\#"] & F \\ F \arrow[ur, dashed, "\exists f''"'] & \end{tikzcd} \qquad (2)\quad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "{\overset{\mathrm{id}_X}{\overset{\shortparallel}{f}}}"] \arrow[d, "\subseteq"'] \arrow[dr, phantom, "\#"] & F \\ F \arrow[ur, dashed, "f'"'] & \end{tikzcd}$$

Ale f'': jedyne.

Stąd $f'' = \mathrm{id}_F$ (bo id_F dobre w (1)),
$f' = f''$ (bo f'' jedyne w (1)) $\Rightarrow f' = \mathrm{id}_F$

$\Downarrow$

$F_0 = F$.

Przykłady.

(1) $F = \{e\}$ wolna rangi 0

(2) $(\mathbb{Z}, +)$: wolna rangi 1, wolny generator: 1 (−1 też).