Wykład 6

Grupy małych rzędów: G: grupa rzędu n.

1. $n=1 \Rightarrow G=\{e\}$ trywialna
2. $n=2 \Rightarrow G \cong (\mathbb{Z}_2, +_2)$ cykliczna
3. $n=3 \Rightarrow G \cong (\mathbb{Z}_3, +_3)$ cykliczna

4. $n=4$.

4(a): $\exists a \in G$ $\text{ord}(a)=4 \Rightarrow G \cong (\mathbb{Z}_4, +_4)$ cykliczna

4(b): $\forall a \in G$ $a^2=e$. Wtedy G abelowa,

$$G \cong K_4 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$$

5. $n=5$ $G \cong (\mathbb{Z}_5, +_5)$ dotychczas: $\underline{G: \text{abelowa}}$

---

6. $n=6$. Niech $a, b \in G$ takie, że

$\text{ord}(a)=3$, $\text{ord}(b)=2$ (z tw. Sylova, Cauchy'ego)

Niech $N := \langle a \rangle \trianglelefteq G$, bo $[G:N]=2$

$H := \langle b \rangle < G$

N, H spełniają założenia tw. 4.8 (o $\rtimes$), więc

$G \cong N \rtimes H$. (H działa na N przez sprzężenie w G)

$H \trianglelefteq N$:

6(a) trywialne (tzn. w G: $(\forall n \in N, h \in H)\ n^h = n$)

Wtedy $G \cong N \times H$

$$\begin{array}{c} N \times H \\ \text{\rotatebox{90}{$\cong$}} \quad \text{\rotatebox{90}{$\cong$}} \end{array}$$

$$G \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2 \cong (\mathbb{Z}_6, +_6)$$

$$\mathrm{ord}(\langle 1,1\rangle) = 2 \cdot 3 = 6$$

6(b) nietrywialne, tzn. dla $h \in H \setminus \{e\}$ $\overset{\text{każdego}}{\forall n \in N}$:

w G: $n^h = n^{-1}$

[$\mathrm{Aut}(N) = \{id_N, inv\} \cong \mathbb{Z}_2 \cong H$]

$inv(n) = n^{-1}$

$\varphi : H \longrightarrow \mathrm{Aut}(N) \cong \mathbb{Z}_2$

[6(a): φ trywialne, $\varphi(h) = id_N$ dla każdego $h \in H$]

[6(b): φ nietrywialne $\rightarrow$ φ izomorfizm.

Wtedy G nieabelowa

$G \cong N \rtimes H$ z tym nietrywialnym działaniem H na N przez automorfizmy

to występuje w ~~przyro~~ naturze:

$$D_3 \cong O_3 \rtimes \mathbb{Z}_2 \cong S_3$$

$$O_3 \rtimes \mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z}_3 \rtimes \mathbb{Z}_2 \quad \underline{\text{nieabelowa}}.$$

Czyli: w przypadku 6(b) $G \cong D_3 \cong S_3$.

7. $n=7$ $\quad G \cong (\mathbb{Z}_7, +_7)$

ogólniej: $n=p$ l. pierwsza $\Rightarrow G \cong (\mathbb{Z}_p, +_p)$
cykliczna

8. $n=8$. ~~później~~

8(a). G abelowa $\Rightarrow G \cong$ produkt grup cyklicznych

tzn. $G \cong \mathbb{Z}_8$ lub $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ lub $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$.

8(b) G nieabelowa. Wtedy $\exists a \in G$ $\operatorname{ord}(a) = 4$.

Niech $N = \langle a \rangle \triangleleft G$
bo $[G:N]=2$

8(b1) $\exists b \in G \setminus N$ $\operatorname{ord}(b) = 2$.

Niech $H := \langle b \rangle \cong \mathbb{Z}_2$.

Wtedy $G \cong N \rtimes H \cong D_4$

$$\begin{array}{ccc} N & \rtimes & H \\ \wr\wr & & \wr\wr \\ \mathbb{Z}_4 & \rtimes & \mathbb{Z}_2 \end{array}$$

8(b2) $\forall b \in G \setminus N$ $\operatorname{ord}(b) = 4$.

- $j_b(a) = a^{-1} = a^3$
- $b^2 \in N$ $\operatorname{ord}(b^2) = 2 \Rightarrow b^2 = a^2$

Wtedy $G \cong Q_8$: ósemkowa grupa kwaternionów.

Co to?

w $M_{2\times 2}(\mathbb{C})$:

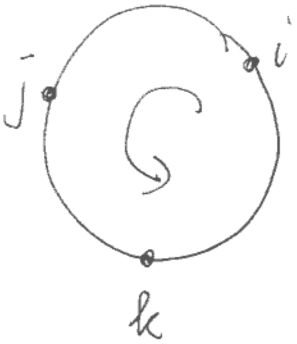
$I = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $\underset{\underset{i}{\shortparallel}}{A} = \begin{pmatrix} i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix}$, $\underset{\underset{j}{\shortparallel}}{B} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$, $\underset{\underset{k}{\shortparallel}}{C} = \begin{pmatrix}0 & i\\ i & 0\end{pmatrix}$

$Q_8 = \{\pm I, \pm A, \pm B, \pm C\} = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$

$\wedge$

$GL_2(\mathbb{C})$

- rzędu 8, nieabelowa
- każdy element $\neq \pm 1$ ma rząd 4.
- $ij = k$, $jk = i$, $ki = j$
- $ji = -k$, $kj = -i$, $ik = -j$
- $i^2 = j^2 = k^2 = -1$



Uwaga: grupa Q_8:
- ma podgrupę $N \triangleleft Q_8$ rzędu 4.
- nie jest produktem półprostym $N \rtimes H$.

9. Większe n:

- $n = 9$: $G \cong (\mathbb{Z}_9, +_9)$ lub $(\mathbb{Z}_3, +_3) \times (\mathbb{Z}_3, +_3)$

  (ogólniej: grupa rzędu p^2 jest abelowa) zad.
- $n = 10$: G abelowa lub $G \cong D_{10}$

  (ogólniej: $n = 2p \Rightarrow G$ abelowa lub $G \cong D_p$)
- $n = 11$: $G \cong \mathbb{Z}_{11}$
- $n = 12$ ... (?)