ZAD. 13.2

- A^TA jest macierzą symetryczną
- jeśli $x^TA^TAx \geq 0$, to A^TA dodatnio określona oraz

$\exists\ 0 \leq \lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n$ wartości własnych.

$\exists$ wektory własne $v_1, v_2, \ldots, v_n$ tworzące bazę $\mathbb{R}^n$. ortonormalną!

$$A^TA v_i = \lambda_i v_i \quad , \ \lambda_i \geq 0$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} = \sqrt{x^Tx}$$

$$\|A\|_2^2 = \max_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2^2$$

$$\|Ax\|_2^2 = x^TA^TAx = x^T\left(A^TA\left(\sum \alpha_i v_i\right)\right) =$$

$$= x^T \cdot \sum_{i=1}^n \alpha_i (A^TA) v_i =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i\right)^T \cdot \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i v_i\right) = \sum_{i,j=1}^n \alpha_i \alpha_j \lambda_i \underbrace{v_j^T v_i}_{\text{ortonormalne}} =$$

$$= \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \lambda_i = (*)$$

$$\|x\|_2 = 1 \Rightarrow 1 = x^Tx = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i^T\right)\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i\right) =$$

$$= \sum_{i,j=1}^n \alpha_i \alpha_j v_i^T v_j =$$

$$= \sum_{i=1}^n \alpha_i^2$$

$(*) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \lambda_i$ oraz $\sum \alpha_i^2 = 1$, maksymalizujemy, więc przyjmiemy $\alpha_n = 1$, $\alpha_i = 0$ dla $i \leq n-1$.

$$\|A\|_2 = \max_{\|x\|_2} \|Ax\|_2 = \sqrt{\lambda_n}$$

Własności normy:

- $\|x\| > 0$ dla $x \neq 0$
- $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$
- $\|x\| + \|y\| \geq \|x + y\|$

ZAD. 13.1

a) $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$

- $\|x\|_1 = 0 \iff x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$
  w p.w. $\|x\|_1 > 0$.
- $\|\alpha x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |\alpha x_i| = |\alpha| \sum |x_i| = |\alpha| \cdot \|x\|_1$
- $\|x\|_1 + \|y\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| + |y_i| \geq \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i| = \|x+y\|_1$

(b)

$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} \{|x_k|\}$

- $\|x\|_\infty = 0 \iff x_1 = \ldots = x_n = 0$, w p.w. $\|x\|_\infty > 0$

- $\|\alpha x\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} \{ |\alpha x_k| \}$

Zad. 13.5

1° $\|Ax\|_2 \leq \|A\|_E \cdot \|x\|_2$

2° $\|A\|_E > 0$ dla $A \neq 0$

3° $\|\lambda A\|_E = |\lambda| \, \|A\|_E$

4° $\|A+B\|_E \leq \|A\|_E + \|B\|_E$

Jeżeli potraktujemy A, B jako wektory w przestrzeni $\mathbb{R}^{n^2}$, to mamy to od razu.

5° $\|A \cdot B\|_E \leq \|A\|_E \cdot \|B\|_E$

1° $\|Ax\|_2^2 \leq \|A\|_E^2 \cdot \|x\|_2^2$ jest $\Leftrightarrow$ z tezą.

$$\sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \Big)^2 \leq \sum_{i,j} a_{ij}^2 \cdot \sum_j x_j^2$$

Ustalmy i, z nierównością Cauchy'ego

$$\sum_{j=1}^{n} (a_{ij} x_j)^2 \leq \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \cdot \sum_{j=1}^{n} x_j^2$$

Teraz sumujemy po i, dostajemy co należy.

$$5^\circ \quad \|A \cdot B\|_E^2 = \sum_{i=1} \sum_{j=1} \Big(\sum_{h=1} a_{ih} \cdot b_{hj} \Big)^2 \overset{\text{Cauchy}}{\leq}$$

$$\leq \sum_i \sum_j \Big(\sum_h a_{ih}^2 \Big) \Big(\sum_h b_{hj}^2 \Big) =$$

$$= \sum_i \sum_j \sum_h \sum_k a_{ih}^2 \cdot b_{kj}^2 = \sum_{i,h} \sum_{k,j} a_{ih}^2 \cdot b_{kj}^2 =$$

$$= \sum_{i,j,n} a_{in}^2 \cdot \sum_{j,k} b_{jk}^2 = \|A\|_E^2 \cdot \|B\|_E^2$$

Zad. 13.4

$$\|A\|_\infty = \max_{\|x\|_\infty = 1} \|Ax\|_\infty =$$

$$= \max_{\|x\|_\infty = 1} \max_{1 \le k \le n} |(Ax)_k| =$$

$$= \max_{\|x\|_\infty = 1} \max_{1 \le i \le n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j \right| =$$

$$= \max_{1 \le i \le n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot \operatorname{sgn}(a_{ij}) \right| =$$

$$= \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

Zad. 13.3

(a)

$$\|x\|_\infty = \max_{1\le k\le n} |x_k| \le \underbrace{\sum_{i=1}^{n} |x_i|}_{\|x\|_2} \le \sum_{i=1}^{n} \max_{1\le k\le n} |x_k| = n\|x\|_\infty$$

(b) $$\|x\|_\infty = \max_{1\le k\le n} |x_k| = \sqrt{\left(\max_k |x_k|\right)^2} \le$$

$$\le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\max_k |x_k|\right)^2} = \sqrt{n}\,\|x\|_\infty$$

(c) $$\frac{1}{\sqrt{n}}\|x_1\| = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} x_i \overset{AK}{\le} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \le (*)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot x_i \le \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|\right)^2$$

$$(*) = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|\right)^2} = \|x\|_1$$