2922

wtorek, 22 grudnia 2020 01:42

(a) R, S — pierścienie ideałów głównych

Niech $J \triangleleft R \times S$. Niech $J_R = \{r \in R \mid \exists s \in S \ (r,s) \in J\}$

oraz $J_S = \{s \in S \mid \exists r \in R \ (r,s) \in J\}$. (Są to ideały R, S)

Wtedy oczywiście $J_R \times J_S \supseteq J$.

Oznaczmy $(a) = J_R$, $(b) = J_S$. Wtedy

$$(a, 0) \in J \quad \text{oraz} \quad (0, b) \in J,$$

$$\text{a zatem} \quad (a, 0_S) + (0_R, b) = (a, b) \in J$$

Stąd $\underbrace{(R \times S)(a, b)}_{= ((a,b)) = J_R \times J_S} \subseteq (R \times S) J \subseteq J$

Zatem $J_R \times J_S = J = ((a,b))$.

(b)

Niech $J_n = (X_0, X_1, \dots, X_n)$

Wtedy dla $n \in \mathbb{N}$ mamy $J_n \neq J_{n+1}$, gdyż

$J_n \not\ni X_{n+1} \in J_{n+1}$, ponadto $J_n \subseteq J_{n+1}$.