$\alpha \longrightarrow$

zad. 1

c) $Z(G) \triangleleft G$ oraz dla $g \in G$ $|g^G| = [G : C(g)]$

• $Z(G) \triangleleft G$ ~~Weźmy $g \in Z(G)$, $g, h \in Z(G)$~~

Weźmy $z \in Z(G)$. Wtedy dla $g \in G$

$$gzg^{-1} = gg^{-1}z = z \in Z(G)$$

- $|g^G| = [G : C(g)]$

Rozważmy działanie grupowe $\bullet : G \times G \to G$
dane wzorem $h \bullet g = hgh^{-1}g^{-1}$

Zauważmy, że $C(g) = G_g$. Faktycznie skoro
$h \in C(g)$, to $hg = gh \Leftrightarrow \underbrace{hgh^{-1}g^{-1}}_{= h \bullet g} = e \Leftrightarrow h \in G_g$.

Z drugiej strony zauważmy że $|g^G| = |O(g)|$
Niech $f : g^G \to O(g)$ dana wzorem $f(aga^{-1}) =$
$= aga^{-1}g^{-1}$

To oczywiście ~~bijekcja~~ epimorfizm.
Pokażemy że jest 1-1.
Zał. że

$$f(aga^{-1}) = f(bgb^{-1})$$
$$\Updownarrow$$
$$aga^{-1}g^{-1} = bgb^{-1}g^{-1}$$
$$\Updownarrow$$
$$aga^{-1} = bgb^{-1}.$$

Zatem $|g^G| = |O(g)| = [G : G_g] = [G : C(g)]$

∎

d) $G/Z(G) \cong Inn(G)$, $Inn(G) = \{ j_g \mid g \in G \}$

Rozważmy $f : G \xrightarrow[\text{epi}]{} Inn(G)$ dane wzorem

$$f(g) = j_g$$

Wtedy $\ker f = \{ g \in G \mid j_g = j_e \} =$

$$= \{ g \in G \mid \forall x \in G \ \ gxg^{-1} = x \} =$$

$$= \{ g \in G \mid \forall x \in G \ \ gx = xg \} = Z(G)$$

Stąd i ZTHG:

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "f"] \arrow[d, "j"'] & Inn(G) \\
G/Z(G) \arrow[ur, dashed, "\cong"] &
\end{tikzcd}$$

∎

e) $Inn(G) \triangleleft Aut(G)$

Weźmy $j_g \in Inn(G)$ oraz $f \in Aut(G)$

dla pewnego y

Niech $h = f(g)$, Wtedy $(f \circ j_g \circ f^{-1})(x) = (f \circ j_g \circ f^{-1})(f(y)) =$

$$= (f \circ j_g)(y) = f(gyg^{-1}) = f(g)\, x\, f(g)^{-1} = hxh^{-1} =$$

$$= j_h(x)$$

Z dowolności x mamy $j_g = j_{f(g)} \in Inn(G)$

∎

zad. 7 $\quad \sigma = \gamma J \gamma^{-1} \iff$ cykli dł. k w σ tyle samo co dł. k w J

„$\Leftarrow$"

$$\sigma = (s_1^1 \dots s_{k_1}^1)(s_1^2 \dots s_{k_2}^2)\dots(s_1^c \dots s_{k_c}^c)$$

$$J = (t_1^1 \dots t_{k_1}^1)(t_1^2 \dots t_{k_2}^2)\dots(t_1^c \dots t_{k_c}^c)$$

Niech $\gamma^{-1}(s_j^i) = t_j^i \quad (\iff \gamma(t_j^i) = s_j^i)$

Wtedy $\gamma J \gamma^{-1}(s_j^i) = \gamma J(t_j^i) = \gamma(t^i_{"j+1"}) =$

$= s^i_{"j+1"}$

oraz $\sigma(s_j^i) = s^i_{"j+1"}$

$$\left[\begin{array}{l} (s_1^i\, s_2^i \dots s_j^i\, s_{j+1}^i \dots \\ \qquad\qquad \gamma^{-1}\downarrow \quad \uparrow\gamma \\ (t_1^i\, t_2^i \dots t_j^i\, t_{j+1}^i \dots t \\ \qquad\qquad\qquad J \end{array}\right.$$

„$\Rightarrow$"

Weźmy dowolne γ t. że $\sigma = \gamma J \gamma^{-1}$.

Weźmy dowolny cykl $(s_1^i\, s_2^i \dots s_{k_i}^i)$ w σ.

Wtedy $s_2^i = \sigma(s_1^i) = (\gamma J \gamma^{-1})(s_1^i) = (\gamma J)(\underbrace{\gamma^{-1}(s_1^i)}_{t_1^i}) =$

$= \gamma(J(t_1^i))$

$s_3^i = \sigma^2(s_1^i) = (\gamma J^2 \gamma^{-1})(s_1^i) = (\gamma J^2)(\gamma^{-1}(s_1^i)) =$

$= \gamma(J^2(t_1^i))$ $\quad * \quad s_3^i \neq s_2^i \Rightarrow J^2(t_1^i) \neq J(t_1^i)$

$\vdots$

$s_{k_i}^i = \sigma^{k-1}(s_1^i) = \gamma(J^{k-1}(t_1^i))$

$s_1^i = \sigma^k(s_1^i) = \gamma(J^k(t_1^i)) = \gamma(t_1^i)$

Zauważmy, że skoro γ jest 1-1 oraz $s_1^i, s_2^i, \dots, s_{k_i}^i$ są parami różne, to $J(t_1^i), J^2(t_1^i), \dots, J^{k-1}(t_1^i)$ też parami różne i skoro $J^k(t_1^i) = t_1^i$ to również tworzą cykl w J.

Możemy tę procedurę powtórzyć dla dowolnego cyklu w σ i dostaniemy cykl tej samej długości w J, a z faktu, że pracujemy na permutacjach ~~każdy z tych~~ otrzymane cykle w J są parami rozłączne, stąd w σ oraz J cykli dł. k jest tyle samo. $\blacksquare$