zad. 9 Załóżmy, że $H < G$ oraz $|G:H|$ skończone.
Udowodnić że istnieje $N < H$ skończonego indeksu w G oraz normalne w G.

Rozwiązanie: Podamy N wzorem i zobaczymy, że N jest szukaną podgrupą:

$$N = \bigcap_{g \in G} g^{-1} H g$$ („normal core" podgrupy H)

Dlaczego $N < H$?

- $N \subseteq e^{-1} H e = H$
- Pokażemy, że $N < G$:
  (i) Element neutralny – oczywiście jest w N, gdyż dla dowolnego $g \in G$ mamy
  $$g^{-1} e g = g^{-1} g = e.$$
  (ii) Łączność – to zapewnia nam łączność działania i nie ma związku z samym wyborem N.

(iii) Element odwrotny – weźmy $n \in N$. Wtedy dla dowolnego $g \in G$ istnieje $h \in H$ t. że $n = g^{-1} h g$, ale stąd otrzymujemy $n^{-1} = g^{-1} h^{-1} g \in g^{-1} H g$, z dowolności g mamy $n^{-1} \in N$.

Dlaczego $N \triangleleft G$?

Weźmy $n \in N$ oraz dowolne $g \in G$. Pokażemy, że dla dowolnego $g' \in G$ zachodzi $g^{-1}ng \in g'^{-1}Hg'$.

Przyjmijmy $d = g'g^{-1}$. Wtedy $n \in d^{-1}Hd = (g'g^{-1})^{-1}H(g'g^{-1})$ a to jest równoważne $g^{-1}ng \in g'^{-1}Hg'$.

Pokażemy teraz, że $|G:N|$ skończone.

Niech $f : G \longrightarrow S_n$ jest dane wzorem $f(g) = (i_1, i_2, \dots, i_n)$, gdzie $n = |G:H|$, $\{g_1H, g_2H, \dots, g_nH\}$ jest zbiorem lewostronnych warstw H, oraz $\forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$ mamy $g(g_jH) = g(g_{i_j}H)$. „Po ludzku", funkcja f mówi jak dany element g permutuje nasz zbiór warstw działaniem lewostronnym. f jest oczywiście homomorfizmem (mnożenie elementów G to jak składanie permutacji). Spójrzmy na $\ker f$.

$$\ker f = \{g \in G \mid f(g) = id_n\} =$$
$$= \{g \in G \mid (\forall x \in G)(gxH = xH)\} =$$ (czyli g nie przeprowadza żadnej warstwy na inną)
$$= \{g \in G \mid (\forall x \in G)(x^{-1}gxH = H)\} =$$
$$= \{g \in G \mid (\forall x \in G)(x^{-1}gx \in H)\} =$$
$$= \{g \in G \mid (\forall x \in G)(g \in xHx^{-1})\} = N$$

Warstwy N to włókna funkcji f, zatem zbiory postaci $f^{-1}[\{s\}]$, $s \in S_n$, ale takich zbiorów jest nie więcej niż S_n, a zatem $|G:N| \leq |S_n| = n!$, zatem w szczególności $|G:N|$ jest skończone. ∎