(a) (24 obroty i 24 symetrie)

Zad. 1 Izometrii sześcianu jest 48,

Orbita wierzchołka ma moc 8,

bo wierzchołek może przejść

na dowolny inny, ponadto

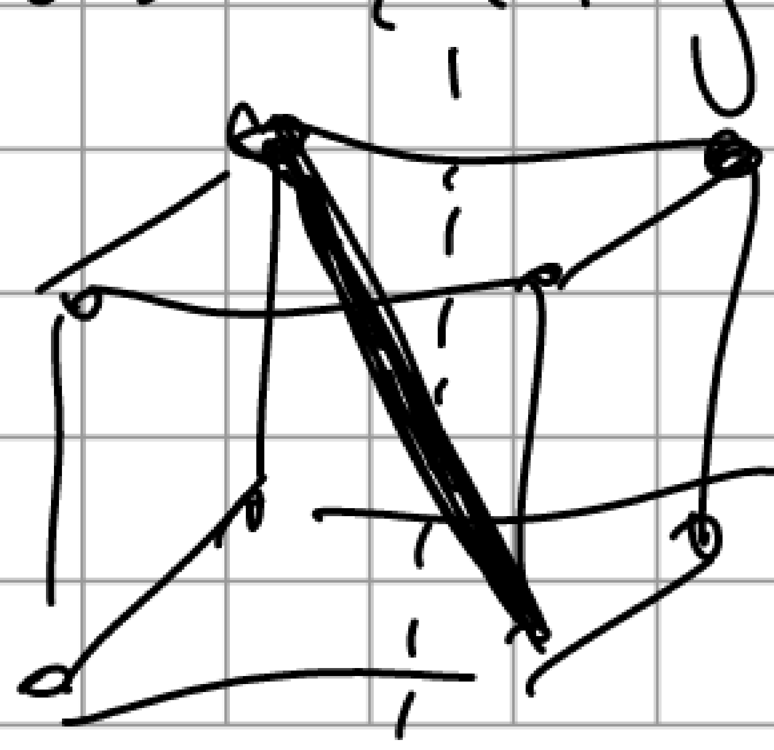
$$|S_A| \cdot |O(A)| = |S|$$

$$\Downarrow$$

$$|S_A| = 6.$$

(c) Podgrupa obrotów jest normalna i nietrywialna.

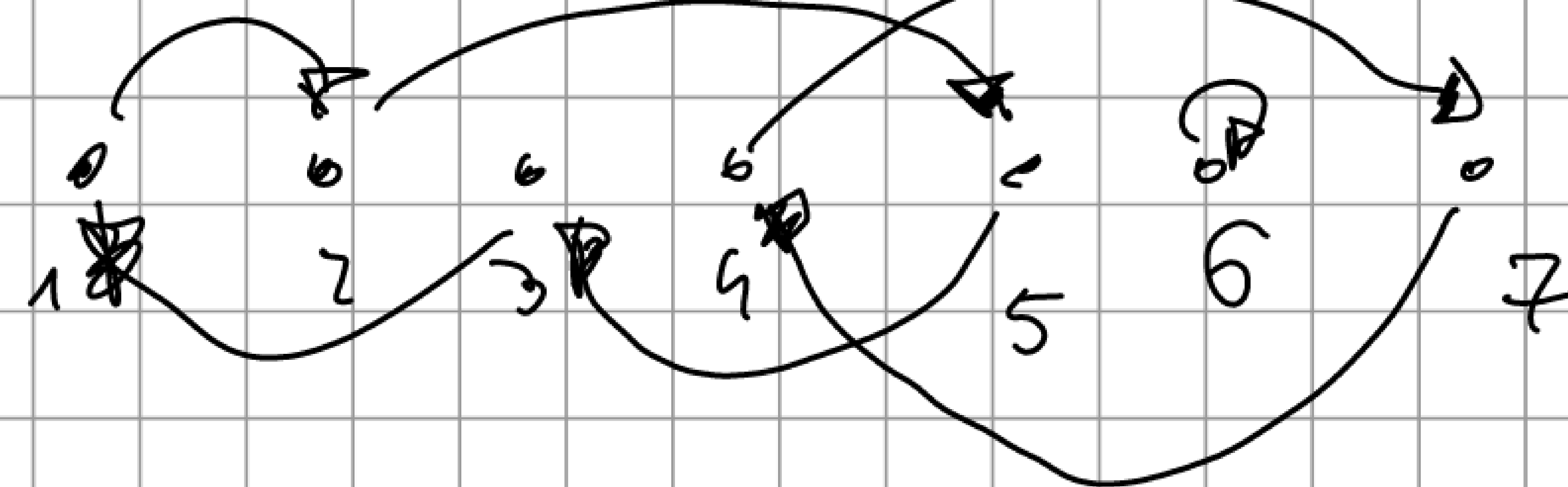
(d) Podgrupa złożona z identyczności i obrotów wokół jakiejś długiej przekątnej:



Łatwo sprawdzić, że np. sprzężenie przez obrót w koło daje coś innego.

Zad. 2

(a)



$$\sigma = (1,2,5,3)(4,7)$$

Rozważmy działanie S_7 na siebie przez sprzężenie. Wtedy $C(\sigma)$ jest stabilizatorem σ. Zatem $|C(\sigma)| \cdot |\sigma^{S_7}| = |S_7|$.

Ponadto permutacje są sprzężone, gdy mają podobny rozkład na cykle. Zatem

$$|\sigma^{S_7}| = \binom{7}{4} \cdot 3! \cdot \binom{3}{2} \cdot 1! =$$

$$= 6 \cdot 3 \cdot \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 630$$

Zatem $|C(\sigma)| = \frac{5040}{630} = 8$

(b) Gdyby $C(\sigma)$ abelowa

to $\cong$ z $\mathbb{Z}_8$, $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$ lub

$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

$\mathrm{ord}(\sigma) = 4$, niech

$N = \langle \sigma \rangle$. Wtedy $N \triangleleft C(\sigma)$,

ponieważ indeks N wynosi 2.

(c) $C(\sigma)$ jest abelowa.

Wystarczy wyznaczyć pozostałe

elemnty $C(\sigma)$.

$$\tau \sigma \tau^{-1} = \sigma = (1,2,5,3)(4,7)$$

$$\| $$

$$(\tau(1), \tau(2), \tau(5), \tau(3))(\tau(4), \tau(7))$$

Czyli τ przesuwa $1,2,5,3$ oraz

$4, 7$.

$$C(\sigma) = \{ id, (1,2,5,3)(4,7), (1,5)(2,3), (1,3,5,2)(4,7), (1,2,5,3), (1,5)(2,3), (1,3,5,2), (4,7) \}$$

Nietrudno zobaczyć, że $C(\sigma)$ w takim razie abelowa.

Zatem $C(\sigma)$ jest izo z $\mathbb{Z}_8$, $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$ albo $\mathbb{Z}_2^3$.

W $C(\sigma)$ nie ma elementu rzędu 8, więc $C(\sigma) \not\cong \mathbb{Z}_8$ oraz jest element rzędu 4, więc $C(\sigma) \not\cong \mathbb{Z}_2^3$. Zatem $C(\sigma) \cong \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$

$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$ jest produktem prostym swoich podgrup właściwych, więc $C(\sigma)$ też jest.

Zad. 3

(a) $f : (\mathbb{Z}^2, +) \longrightarrow (\mathbb{Z}_{1000}, +_{1000})$

Wiemy, że $f((0,0)) = 0$.

Jeśli ustalimy na co przechodzą $(1,0)$ oraz $(0,1)$ to mamy f, bo $\langle (1,0), (0,1) \rangle = \mathbb{Z}^2$.

Możemy na 1000 sposobów wybrać $f((0,1))$ oraz na 1000 wybrać $f((1,0))$, zatem takich homomorfizmów jest 10^6.

(b) $H < (\mathbb{Z}^2, +) = G$, $[G : H] = 6$

G/H może być zatem $\cong$ z $\mathbb{Z}_6$ albo z $\mathbb{Z}_3 \rtimes \mathbb{Z}_2 \cong D_3$, ale D_3 nie jest abelowa, a $\mathbb{Z}_6$ jest, więc $G/H \cong \mathbb{Z}_6$.

(c) $H < G$ to znaczy, że H jest postaci $n\mathbb{Z} \times m\mathbb{Z}$.

Ponadto $\left| G/_H \right| = n \cdot m$.

Jest tak dlatego, że

$$\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}} \times \mathbb{Z}/_{m\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}^2/_{n\mathbb{Z} \times m\mathbb{Z}}$$

(było na ćwiczeniach, bo $n\mathbb{Z}$, $m\mathbb{Z}$ normalne podgrupy $\mathbb{Z}$)

A zatem mamy tylko 4 możliwości, żeby $n \cdot m = 6$.

Zatem te podgrupy to

$\mathbb{Z} \times 6\mathbb{Z}$, $6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $2\mathbb{Z} \times 3\mathbb{Z}$, $3\mathbb{Z} \times 2\mathbb{Z}$.

Zad. 4

(a) K – dowolne ciało.

Wtedy $K[X_1, X_2]$. Nie jest euklidesowe, bo nie jest PID, ale jest dziedziną, bo jeśli R – dziedzina, to $R[X]$ też, więc $R[X_1, X_2]$ też.

(b) $\mathbb{Z}$ to pierwszy pierścień.

$\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$ to drugi pierścień.

Nie są izomorficzne, chociażby dlatego że $\mathbb{Z}^* \cong \mathbb{Z}_2$, a $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]^*$ jest nieskończone.

Ale $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]_0 = \mathbb{Z}_0 = \mathbb{Q}$.

Zad. 5

(a) R noetherowski $\Leftrightarrow$ dla każdego ciągu ideałów $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots$ ciąg od pewnego miejsca stały. Zał. że $a_n \in R$, $n = 0, 1, \dots$ t. że $a_{n+1} | a_n$ oraz $a_n \nmid a_{n+1}$ dla wszystkich n. Wtedy

$a_{n+1} | a_n \Rightarrow (a_n) \subseteq (a_{n+1})$ oraz $(a_n) \not\supseteq (a_{n+1})$, czyli $(a_n) \neq (a_{n+1})$. Mamy sprzeczność, bo ciąg $(a_0) \subseteq (a_1) \subseteq (a_2) \subseteq \dots$ powinien być od pewnego momentu stały.

(b) $b^2 \sim c^2 \iff ab^2 = c^2$

dla pewnego odwracalnego a.

$$b^2 = p_1^{2\alpha_1} p_2^{2\alpha_2} \dots p_n^{2\alpha_n}$$

$$c^2 = a p_1^{2\alpha_1} p_2^{2\alpha_2} \dots p_n^{2\alpha_n},$$

Chcemy znaleźć takie d, że $d^2 = a$, bo wtedy

(*) $d^2 b^2 = c^2$ (no i oczywiście $d \in R^*$)

$$\Downarrow$$

$$db = c \text{ lub } -db = c$$

R : UFD $\Rightarrow$ $R[X]$ też UFD.

Rozważmy ideał $(X^2 - a)$. Jeśli $X^2 - a$ nierozkł., to $(X^2 - a)$ pierwszy. Ale to znaczy, że

Ale $\underset{(x^2-a)}{\underset{\uparrow}{b^2(x^2-a)}} = b^2x^2 - c^2 =$

$= (bx)^2 - c^2 = (bx-c)(bx+c).$

Zatem $x^2 - a \mid (bx-c)(bx+c)$.

Skoro (x^2-a) pierwszy, to

$x^2 - a \mid bx - c$ lub $x^2 - a \mid bx + c$

a to nie może być bo

stopnie $bx - c$, $bx + c$ są mniejsze

od $x^2 - a$, a przecież $\mathbb{R}[X]$ jest

dziedziną. Zatem $x^2 - a$ jest

rozkładalny, więc jest takie

d, że $d^2 = a$. Mamy zatem

to, czego chcieliśmy.

(*)

$0 = d^2b^2 - c^2 = (db - c)(db + c) = 0$

$\Downarrow$

$db - c = 0$ lub

$db + c = 0$ bo $\mathbb{R}$ dziedzina.