ALGEBRA L3Z7

KACPER SOLECKI

$\Rightarrow$). Załóżmy, że $\sigma = \alpha\tau\alpha^{-1}, \alpha \in S_n$.
Pokażemy przez indukcję, że $\sigma^n = \alpha\tau^n\alpha^{-1}$.

Baza. $n = 1$ zachodzi z założenia.

Krok. $\sigma^n = \sigma^{n-1} \circ \sigma \overset{zal.in.}{=} \alpha\tau^{n-1}\alpha^{-1}\alpha\tau\alpha^{-1} = \alpha\tau^n\alpha^{-1}$ ■

Niech $x \in \{1, ..., n\}$
$k :=$ najmniejsze $r > 0 : \sigma^r(x) = x$ (długość cyklu na którym jest x w σ)
$k_2 :=$ najmniejsze $r > 0 : \tau^r(\alpha^{-1}(x)) = \alpha^{-1}(x)$ (długość cyklu na którym jest $\alpha^{-1}(x)$ w τ)
Wtedy:

$$\sigma^k(x) = x \Leftrightarrow \alpha\tau^k\alpha^{-1}(x) = x \Leftrightarrow \tau^k\alpha^{-1}(x) = \alpha^{-1}(x)$$

zatem $k_2|k$. Z drugiej strony:

$$\tau^{k_2}(\alpha^{-1}(x)) = \alpha^{-1}(x) \Leftrightarrow \alpha^{-1}\sigma^{k_2}\alpha(\alpha^{-1}(x)) = \alpha^{-1}(x) \Leftrightarrow$$
$$\alpha^{-1}\sigma^{k_2}(x) = \alpha^{-1}(x) \Leftrightarrow \sigma^{k_2}(x) = x$$

zatem $k|k_2$.
Z tych dwóch podzielności wynika $k = k_2$.
Każdy element x należy do dokładnie jednego cyklu zarówno w σ jak i w τ,
$\alpha^{-1} : \{1, ..., n\} \to \{1, ..., n\}$ jest bijekcją, więc dla każdego k jest tyle samo elementów które znajdują się na cyklach długości k w σ co w τ, zatem rozkłady σ i τ na cykle są podobne. (cykli długości k jest k razy mniej niż sumarycznie elementów na takich cyklach).

$\Leftarrow$). Załóżmy, że rozkłady na cykle rozłączne σ i τ są podobne. Niech

$$\sigma = (x_0^1, x_1^1, ..., x_{k_1}^1)(x_0^2, x_1^2, ..., x_{k_2-1}^2)...(x_0^c, x_1^c, ..., x_{k_c-1}^c)$$

oraz

$$\tau = (y_0^1, y_1^1, ..., y_{k_1-1}^1)(y_0^2, y_1^2, ..., y_{k_2-1}^2)...(y_0^c, y_1^c, ..., y_{k_c-1}^c)$$

Wtedy, dla α zdefinowanego: $\alpha(y_i^j) = x_i^j$ mamy $\sigma = \alpha\tau\alpha^{-1}$
Rzeczywiście - dla dowolnego $x_i^j \in \{1, ..., n\}$

$$\sigma(x_i^j) = x_{(i+1 \mod k_j)}^j$$
$$\alpha\tau\alpha^{-1}(x_i^j) = \alpha\tau(y_i^j) = \alpha(y_{(i+1 \mod k_j)}^j) = x_{(i+1 \mod k_j)}^j$$

Date: October 2020.