L1Z32

poniedziałek, 9 listopada 2020 15:16

$\mathcal{R}$ – σ – ciało, $A_n \in \mathcal{R}$, $A \in \mathcal{R}$ oraz

$\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$, μ to skończona miara nad $\mathcal{R}$.

Wtedy $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A)$

D-d.

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = A$$

Niech $P_n = \bigcap\limits_{k=n}^{\infty} A_n$ oraz $P_0 = \emptyset$

Wtedy $P_0 \subseteq P_1 \subseteq P_2 \subseteq P_3 \subseteq \dots$

Zatem $\mu\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} P_n\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(P_n \setminus P_{n-1}) =$ [ze skończoności miary]

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\mu(P_n) - \mu(P_{n-1})\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \mu(P_n) \qquad (1)$$

Ponadto $A = \lim\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \bigcap\limits_{k=n}^{\infty} A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} P_n =$

$$= \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} P_k = \lim_{n\to\infty} P_n \qquad (2)$$

bo $P_n \subseteq P_{n+1} \subseteq \dots$, więc $P_n = \bigcap\limits_{k=n}^{\infty} P_k$.

Łącząc te fakty mamy:

$$\mu(A) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} P_n\right) \overset{(1)}{=} \lim_{n\to\infty} \mu(P_n) \overset{(2)}{=}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

■

Gdyby μ nie była skończoną miarą to powyższy warunek nie byłby prawdziwy.

Zauważmy, że ciąg zbiorów $A_n = [n, \infty)$ spełnia $\lambda(A_n) = \infty$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \emptyset$, ale $\lambda(\emptyset) = 0$,

więc $\mu\left(\lim\limits_{n\to\infty} A_n\right) \neq \lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n)$