L1Z22

poniedziałek, 9 listopada 2020 14:46

Na wstępie przypomnijmy, że zbiór $Bor(\mathbb{R})$ jest σ-ciałem generowanym przez zamknięcie zbioru wszystkich otwartych podzbiorów $\mathbb{R}$ na przeliczalne sumy oraz przekroje.
Zauważmy, że w takim razie skoro rodzina wszystkich otwartych przedziałów $\mathbb{R}$ generuje zbiór wszystkich zbiorów otwartych, to generuje też $Bor(\mathbb{R})$.
Jeśli zatem wskażemy σ-ciało $\mathcal{R}$, do którego należą wszystkie przedziały otwarte, to $Bor(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{R}$.

(i) $\mathcal{U} = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{Q}\}$

Oczywiście $\sigma(\mathcal{U}) \subseteq Bor(\mathbb{R})$.

Z drugiej strony weźmy dowolny przedział (a,b), $a,b \in \mathbb{R}$.

Wtedy istnieją takie ciągi a_n, b_n liczb wymiernych, że

- $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$, $b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} b$
- $a_n \leq a$, $b_n \geq b$ dla $n \in \mathbb{N}$

$\sigma(\mathcal{U})$ jest zamknięty na przeliczalne przekroje, zatem $(a,b) = \bigcap_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n) \in \sigma(\mathcal{U})$

Zatem $Bor(\mathcal{U}) \subseteq \sigma(\mathcal{U})$, więc mamy $Bor(\mathcal{U}) = \sigma(\mathcal{U})$.

(ii) $\mathcal{U} = \{[a,b] \mid a,b \in \mathbb{R}\}$

Oczywiście $\sigma(\mathcal{U}) \subseteq Bor(\mathbb{R})$

Weźmy dowolny przedział (a,b) t. że $a,b \in \mathbb{R}$.

Niech a_n, b_n t. że

- $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$, $b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} b$,
- $a_n > a$, $b_n < b$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$.

Wtedy $(a,b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \in \sigma(\mathcal{U})$

Zatem dowolny przedział otwarty należy do $\sigma(\mathcal{U})$, stąd $Bor(\mathbb{R}) \subseteq \sigma(\mathcal{U})$, a zatem

$$Bor(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{U}).$$

(iii)

$\mathcal{U} = \{(-\infty, a], a \in \mathbb{R}\}$

$\mathcal{U} \subseteq Bor(\mathbb{R})$, więc $\sigma(\mathcal{U}) \subseteq Bor(\mathbb{R})$.

Weźmy dowolny przedział (a,b) t. że $a,b \in \mathbb{R}$.

Niech b_n t. że $b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} b$ oraz

$b_n < b$. Wtedy

$b_n < b$. Wtedy

$$(-\infty, b) = \bigcup_{n=0}^{\infty} (-\infty, b_n] \in \sigma(\mathcal{U})$$

dodatkowo $(-\infty, a] \in \sigma(\mathcal{U})$, zatem

$$(a,b) = (-\infty, b) \setminus (-\infty, a] \in \sigma(\mathcal{U}).$$

Zatem $Bor(\mathbb{R}) \subseteq \sigma(\mathcal{U})$, zatem

$$Bor(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{U})$$

(iv)

$$\mathcal{U} = \{(a, \infty) \mid a \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathcal{U} \subseteq Bor(\mathbb{R}) \Rightarrow \sigma(\mathcal{U}) \subseteq Bor(\mathbb{R})$$

Weźmy dowolny przedział (a,b), $a,b \in \mathbb{R}$.

Niech $b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} b$ oraz $b_n < b$.

Wtedy $[b, \infty) = \bigcap_{n=1}^{\infty} (b_n, \infty) \in \sigma(\mathcal{U})$.

$$(a,b) = (a, \infty) \setminus [b, \infty) \in \sigma(\mathcal{U})$$

Zatem $Bor(\mathcal{U}) \subseteq \sigma(\mathcal{U})$, więc

$$Bor(\mathcal{U}) = \sigma(\mathcal{U}).$$

(v) $\mathcal{U} = \{[a,b] \mid a,b \in \mathbb{Q}\}$.

$$\mathcal{U} \subseteq Bor(\mathbb{R}) \Rightarrow \sigma(\mathcal{U}) \subseteq Bor(\mathbb{R})$$

$\mathcal{U} \subseteq Bor(\mathbb{R}) \Rightarrow \sigma(\mathcal{U}) \subseteq Bor(\mathbb{R})$.

Niech $[a,b]$ t. że $a, b \in \mathbb{R}$.

Niech $a_n, b_n \in \mathbb{Q}$ t. że

- $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$, $b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} b$
- $a_n \leq a$, $b_n \geq b$

Wtedy $[a,b] = \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \in \sigma(\mathcal{U})$.

Korzystając z (ii) mamy, że $\sigma(\mathcal{U}) = Bor(\mathbb{R})$.