Zadanie 1.11.G:

Skonstruować zbiór borelowski $B \subseteq \mathbb{R}$, taki że $\lambda(B \cap I) > 0$ oraz $\lambda(B^c \cap I) > 0$ dla każdego niepustego odcinka otwartego I.

Rozwiązanie:

Niech $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem wszystkich liczb wymiernych. Niech teraz V_1 będzie odcinkiem otwartym dodatniej, skończonej miary o środku w r_1. Niech V_n będzie odcinkiem otwartym miary $\frac{\lambda(V_{n-1})}{3}$ o środku w punkcie r_n (dla $n \geq 2$). Ustalmy $W_n := V_n - \bigcup_{k=n+1}^{\infty} V_k$. Wtedy $\{W_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest ciągiem borelowskich, parami rozłącznych zbiorów. Ponadto

$$\lambda(W_n) \geq \lambda(V_n) - \lambda\left(\bigcup_{k=n+1}^{\infty} V_k\right)$$

$$\geq \lambda(V_n) - \sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda(V_k) =$$

$$= \lambda(V_n) - \lambda(V_n)\sum_{k=1}^{\infty} 3^{-k} = \frac{\lambda(V_n)}{2}$$

Zatem W_n mają dodatnią miarę.
Możemy wybrać zbiory borelowskie $B_n \subseteq W_n$ takie, że $0 < \lambda(B_n) < \lambda(W_n)$ (np. możemy szacować W_n z dołu przez zbiory domknięte miary $\lambda(W_n)/2$).

Wtedy zbiór $B := \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ jest szukanym przez nas zbiorem.

Skoro W_n są parami rozłączne, to $\lambda(B \cap W_n) = \lambda(B_n)$, a więc $0 < \lambda(B \cap W_n) < \lambda(W_n)$.

Ponadto $\lambda(B^c \cap W_n) = \lambda(W_n) - \lambda(B \cap W_n) >$

$$> \lambda(W_n) - \lambda(W_n) = 0.$$

Dzięki temu jak wybraliśmy W_n, dla każdego odcinka otwartego $I \neq \emptyset$ istnieje takie n, że $W_n \subseteq I$, $(*)$ zatem $\lambda(B \cap I) \geq \lambda(B \cap W_n) > 0$ oraz

$$\lambda(B^c \cap I) \geq \lambda(B^c \cap W_n) > 0.$$

(*) Dodatkowe wyjaśnienie:

Weźmy dowolny odcinek otwarty $I \neq \emptyset$. Możemy wybrać wtedy takie m, że $\lambda(V_m) < \frac{\lambda(I)}{4}$.

Jeśli s jest środkiem I, to w przedziale $\left(s - \frac{\lambda(I)}{4}, s + \frac{\lambda(I)}{4}\right)$ znajduje się nieskończenie wiele liczb wymiernych, których indeks w ciągu $\{r_n\}$ jest większy niż m. Wybierzmy którąś z nich, niech jej indeks to k. Wtedy V_k jest odcinkiem długości mniejszej niż $\frac{\lambda(I)}{4}$ więc jest w pełni zawarty w I, a zatem $W_k \subseteq I$.

Zadanie 2.5.12/13

(a) Skonstruować niemalejącą funkcję ciągłą $g:[0,1]\to[0,1]$, taką że $g[C]=[0,1]$, gdzie C jest zbiorem Cantora.

(b) Pokazać, że obraz zbioru mierzalnego względem funkcji ciągłej nie musi być mierzalny oraz że przeciwobraz zbioru mierzalnego nie musi być mierzalny.

Rozwiązanie:

(a) $C=\{\sum_{i=1}^{\infty}\frac{a_i}{3^i} : a_i\in\{0,2\}\}$.

Zdefiniujmy najpierw funkcję $c: C\to[0,1]$ daną wzorem

$$c\left(\sum_{i=1}^{\infty}\frac{a_i}{3^i}\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\frac{1}{2}a_i}{2^i}.$$

Taka funkcja jest niemalejąca oraz „na". Staje się to jasne, gdy zauważymy, że liczby w zbiorze Cantora to wszystkie takie, w których zapisie trójkowym nie występuje cyfra $\underline{1}$. Wtedy z własności

$$[0,\underline{1}]=\{\sum_{i=1}^{\infty}\frac{a_i}{2^i}\mid a_i\in\{0,1\}\}$$

natychmiast widać, że c jest „na".

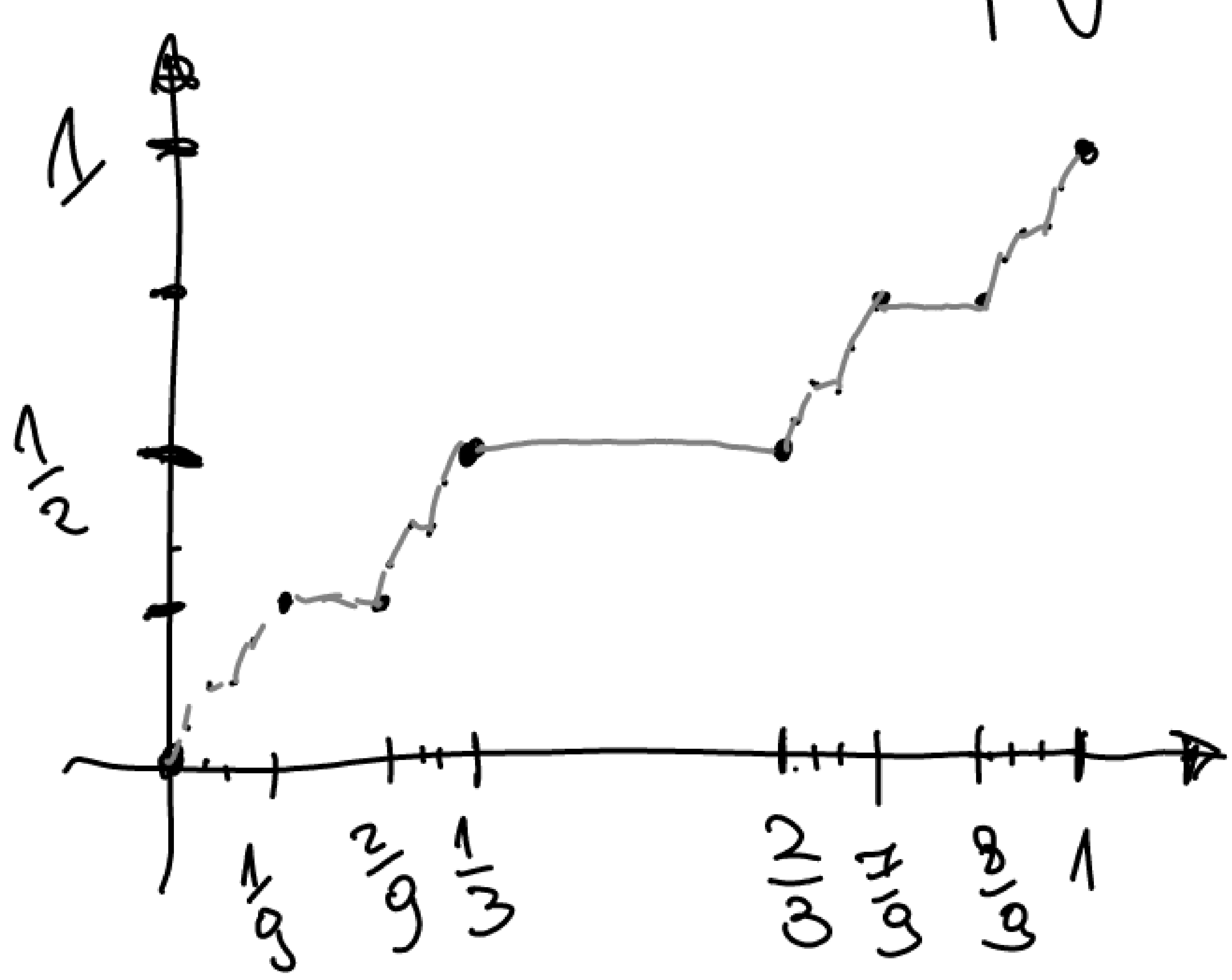
To, że ta funkcja nie maleje również jest oczywiste wprost ze wzoru tej funkcji.

Niech teraz funkcja $g:[0,1]\to[0,1]$ dana jest wzorem

$$g(x)=\begin{cases} c(x) & \text{gdy } x\in C \\ \sup\limits_{y\leq x,\, y\in C} c(y) & \text{w p.w.}\end{cases}$$

Taka funkcja jest faktycznie niemalejąca. Z tego oraz z faktu, że jest „na" wynika ciągłość funkcji g.

Wzór na funkcję g wydaje się być wzięty „z kosmosu", ale wystarczy narysować prosty rysunek, by zrozumieć jaka stoi za nim koncepcja:



Po ustaleniu wartości w punktach ze zbioru Cantora jasne jest, że wszystkie inne punkty muszą przyjąć tę samą wartość co punkty ze zbioru Cantora które je „otaczają". Wymaga tego od nas stała monotoniczność g.

(b) Ustalmy funkcję $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wzorem

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{gdy } x \in [0,1], \\ 0 & \text{gdy } x < 0, \\ 1 & \text{gdy } x > 1. \end{cases}$$

Niech teraz $h(x) = x + f(x)$. Okazuje się, że tak zdefiniowana funkcja h ma ciekawe własności:

- jest homeomorfizmem — bijektywność wynika z faktu, że jest ściśle rosnąca, a do tego „na". Ciągłość dana jest z ciągłości f oraz funkcji identycznościowej. Ciągłość funkcji odwrotnej również jest prosta i wynika z ogólnego faktu, że ciągła bijekcja z $\mathbb{R}$ w $\mathbb{R}$ ma odwrotną funkcję ciągłą. (*)
- Obraz zbioru Cantora względem h jest mierzalny i ma miarę 1.

Niech $E = h[C]$. Mierzalność wynika chociażby z borelowskości h. Teraz

$$\lambda(E) = \lambda([0,2] \setminus h[[0,1] \setminus C]) = 1.$$

Jest tak, gdyż miara zbioru $h[[0,1] \setminus C]$ to po prostu miara zbioru $[0,1]\setminus C$, gdyż ten zbiór jest przeliczalną sumą otwartych odcinków, które h przenosi na odcinki tej samej miary.

Korzystając z obu tych faktów, możemy wskazać już szukane przez nas przykłady. Potrzebny jest tylko następujący lemat:

<u>Lemat</u>: Każdy zbiór mierzalny w sensie Lebesgue'a ma podzbiór niemierzalny.

<u>D-d.</u> Ustalmy relację równoważności na $\mathbb{R}$:

$$x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}$$

(zwrotność i symetryczność jest jasna, przechodniość pozwolę sobie udowodnić w lakoniczny sposób, pisząc po prostu równanie $x - z = (x-y) + (y-z)$).

Korzystając z pewnika wyboru możemy wybrać selektor S przestrzeni ilorazowej $\mathbb{R}/\sim$. Możemy wtedy napisać

$$\mathbb{R} = \dot{\bigcup_{q\in\mathbb{Q}}} (q + S) \qquad (1)$$

(jeśli $q + s = q' + s'$, to $s - s' \in \mathbb{Q}$, więc $s \sim s' \Rightarrow s = s'$, bo S jest selektorem)

Weźmy teraz dowolny zbiór $A \in \mathcal{L}$, taki że $\lambda(A) > 0$.

Gdyby $A \cap (q+S)$ nie był mierzalny dla jakiegoś $q \in \mathbb{Q}$, to znaleźlibyśmy poszukiwany podzbiór A.

Załóżmy zatem, że $A \cap (q+S) =: A_q \in \mathcal{L}$ dla każdego $q \in \mathbb{Q}$.

Zauważmy, że

$$A_q - A_q \subseteq (q+S) - (q+S) = S - S,$$

ale zbiór $S - S$ jest rozłączny z $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$, gdyż nie ma tam dwóch takich x, y, że $x - y \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$.

Z problemu 1.11.H, skoro A_q jest mierzalny, to $\lambda(A_q) = 0$, gdyż w przeciwnym razie istniałaby taka liczba $\delta > 0$, że $(-\delta, \delta) \subseteq A_q$, a co za tym idzie, $(-\delta, \delta) \subseteq A_q - A_q$. Skoro jednak $A = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} A_q$ (to wynika z (1)), to $\lambda(A) = \sum_{q \in \mathbb{Q}} \lambda(A_q) = 0$, co jest sprzeczne z założeniem. ∎

Korzystając z funkcji h oraz naszego lematu, możemy w końcu wskazać szukane przykłady.

Niech $E = h[C]$. Powiedzieliśmy już, że $\lambda(E) > 0$, więc możemy wybrać niemierzalny podzbiór $B \subseteq E$.

Wtedy $A = h^{-1}[B] \subseteq C$ jest mierzalny, bo jest podzbiorem zbioru miary 0. Wtedy $h[\underset{\mathcal{L}}{\underset{\cap}{A}}] = \underset{\mathcal{L}}{\underset{\not\cap}{B}}$.

Analogicznie, skoro h^{-1} jest ciągła, to z bijektywności h:

$$(h^{-1})^{-1}[\underset{\mathcal{L}}{\underset{\cap}{A}}] = h[A] = \underset{\mathcal{L}}{\underset{\not\cap}{B}}.$$

(*) Niech $f : \mathbb{R} \xrightarrow[\text{„na”}]{1-1} \mathbb{R}$ ciągła.

BSO $f \nearrow$. Wtedy

$$f[[-\infty, a)] = [-\infty, f(a))$$

i analogicznie $f[(a, \infty]] = (f(a), \infty]$, więc f^{-1} jest ciągła.

Zadanie 2.6.D:

(a) Niech $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie dowolną funkcją, spełniającą warunek $f(x+y) = f(x) + f(y)$. Sprawdzić, że wtedy $f(x) = ax$ dla $x \in \mathbb{Q}$ $(a = f(1))$.

(b) Udowodnić, że jeśli f jest mierzalna, to $f(x) = ax$ dla $x \in \mathbb{R}$.

Rozwiązanie:

(a) Oznaczmy $a := f(1)$.

Pokażemy nasze twierdzenie w kilku krokach:

1° $f(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = f(x_1) + \ldots + f(x_n)$

D-d. Oczywiste, przez prostą indukcję.

2° $f(n) = an$, dla $n \in \mathbb{N}^+$

D-d. $f(n) = f(\underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{n}) = n f(1) = an$

3° $f\left(\frac{1}{n}\right) = a\frac{1}{n}$, dla $n \in \mathbb{N}^+$

D-d. $f(1) = f\left(\frac{n}{n}\right) = f(\underbrace{\tfrac{1}{n} + \ldots + \tfrac{1}{n}}_{n}) = n f\left(\frac{1}{n}\right)$

$$\Updownarrow$$

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = a \cdot \frac{1}{n}$$

4° $f\left(\frac{n}{m}\right) = a\frac{n}{m}$, $n, m \in \mathbb{N}^+$

D-d. $f\left(\frac{n}{m}\right) = f(\underbrace{\tfrac{1}{m} + \ldots + \tfrac{1}{m}}_{n}) = n f\left(\frac{1}{m}\right) \overset{3^\circ}{=} a\frac{n}{m}$

5° $-f(x) = f(-x)$, $x \in \mathbb{R}$

D-d. $f(0) = f(x+(-x)) = f(x) + f(-x)$

Ale $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0)$,

więc $f(0) = 0$, zatem $-f(x) = f(-x)$

6° $f(q) = aq$, $q \in \mathbb{Q}$

D-d. Natychmiastowy wniosek korzystając z 4° oraz 5°.

(b) Dowód tej części zadania jest trudniejszy i korzysta ze szczególnego przypadku tw. Łuzina. Dowód tego tw. przedstawiam na końcu mojego rozwiązania.

Zauważmy, że wystarczy pokazać, że jeśli f jest addytywna oraz mierzalna, to jest ciągła. Korzystając z ciągłości oraz (a) natychmiast otrzymujemy, że $f(x) = ax$ dla $x \in \mathbb{R}$

Z tw. Łuzina możemy wybrać taki zwarty $K \subseteq [0,1]$, że $\lambda(K) > \frac{2}{3}$ oraz f obcięte do K jest ciągła. Wybierzmy $\varepsilon > 0$. K jest zwarte, więc f jest jednostajnie ciągła nad K, zatem jest taka $\delta > 0$, że dla $x, y \in K$ jeśli $|x-y| < \delta$, to $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Bez straty ogólności można założyć, że $\delta < \frac{1}{3}$.

Wybierzmy dowolne $h < \delta$. Wtedy przekrój $K \cap (K-h)$ (przesunięcie K o $-h$) jest niepusty. Gdyby tak nie było, to:

$$h+1 = \mu([-h,1]) \geq \mu(K \cup (K-h)) = \mu(K) + \mu(K-h) = 2\mu(K) > \frac{4}{3}$$

$$\Downarrow$$

$$h > \frac{1}{3} > \delta,$$

co jest sprzeczne z naszym założeniem.

Niech zatem $x_0 \in K \cap (K-h)$. Wtedy

$$|f(x_0+h) - f(x_0)| < \varepsilon \quad (\text{bo } h < \delta),$$

$$\| \\ |f(x_0) + f(h) - f(x_0)|$$

$$\Downarrow$$

$$|f(h)| < \varepsilon$$

Wiemy, że $f(0) = 0$ i właśnie pokazaliśmy, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$ jest pewne otoczenie wokół 0, w którym funkcja nie przekracza ε (bo h wybraliśmy dowolne i nie zależało od wyboru K), zatem f jest ciągła w 0.

Stąd już prosty wniosek, że dla dowolnego $x_0 \in \mathbb{R}$ mamy

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to 0} f(x+x_0) =$$

$$= \lim_{x\to 0} f(x) + f(x_0) = \left(\lim_{x\to 0} f(x)\right) + f(x_0) =$$

$$= 0 + f(x_0) = f(x_0),$$

zatem f ciągła w każdym punkcie. ■

<u>TW. ŁUZINA</u> Dla dowolnej funkcji mierzalnej $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, dowolnego $\varepsilon>0$, możemy wybrać takie zwarte K, że $f|K$ ciągła oraz $\mu(K) > b-a-\varepsilon$.

<u>D-d.</u>

Niech $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ będzie przeliczalnym ciągiem przedziałów otwartych prostej o końcach wymiernych. Korzystając z wniosku 1.6.3 możemy wybrać takie zwarte K_n, K_n', że $K_n \subseteq f^{-1}[V_n]$, $K_n' \subseteq [a,b]\setminus f^{-1}[V_n]$ oraz

$$\mu([a,b]\setminus(K_n\cup K_n')) < \frac{\varepsilon}{2^n}, \text{ dla } n\in\mathbb{N}.$$

Kładziemy $K := \bigcap_n (K_n\cup K_n')$. Wtedy

$$\mu([a,b]\setminus K) \leq \sum_n \mu([a,b]\setminus(K_n\cup K_n')) < \varepsilon.$$

Mając dane $x \in K$ oraz n t.że $f(x) \in V_n$, możemy napisać, że $x \in U := \mathbb{R} \setminus K_n'$, a wtedy $U \cap K \subseteq K_n \subseteq f^{-1}[V_n]$, co jest równoważne ciągłości funkcji f.

Zadanie 3.5.21

Niech μ będzie miarą skończoną na X, $f_n, f : X \to \mathbb{R}$ będą funkcjami mierzalnymi, takimi że $f_n \xrightarrow{\mu} f$. Udowodnić, że jeśli $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest ograniczona i jednostajnie ciągła, to

$$\lim_{n\to\infty} \int_X h(f_n)\,d\mu = \int_X h(f)\,d\mu .$$

Rozwiązanie:

Pokażemy nieco inne twierdzenie, a mianowicie, że $\lim_{n\to\infty} \int_X |h(f_n) - h(f)|\,d\mu = 0$.

Teza zadania wynika z prostej nierówności:

$$0 \le \left| \int_X h(f_n)\,d\mu - \int_X h(f)\,d\mu \right| \le \int_X |h(f_n) - h(f)|\,d\mu$$

Stawiając granicę z obu stron nierówności dostajemy co należy.

Zajmijmy się zatem dowodem postawionej przez nas równości:

Załóżmy, że $|h| \leq M$. Wybierzmy dowolny $\varepsilon > 0$ i niech $\eta = \dfrac{\varepsilon}{2M + \mu(X)}$. Niech $\delta > 0$ będzie tak dobrane, żeby $|x - y| < \delta \Rightarrow |h(x) - h(y)| < \eta$ (możemy taką δ wybrać, bo h jest jednostajnie ciągła). Ponadto, skoro $f_n \xrightarrow{\mu} f$, to dla dużych n mamy $\mu(\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \delta\}) < \eta$. Niech $A_n = \{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \delta\}$. Wtedy, dla $x \in X \setminus A_n$ mamy $|h(f_n(x)) - h(f(x))| < \eta$ dla dużych n. Możemy zatem napisać

$$\int_X |h(f) - h(f_n)|\, d\mu = \int_{A_n} |h(f) - h(f_n)|\, d\mu + \int_{X \setminus A_n} |h(f) - h(f_n)|\, d\mu <$$

$$< \int_{A_n} 2M\, d\mu + \int_{X \setminus A_n} \eta\, d\mu \leq \mu(A_n) \cdot 2M + \mu(X)\eta <$$

$$< \eta\,(2M + \mu(X)) = \varepsilon,$$

zatem $\lim\limits_{n \to \infty} \int_X |h(f) - h(f_n)|\, d\mu = 0$. $\blacksquare$

Zadanie 4.7.A:

Przy założeniu hipotezy continuum można odcinek $[0,1]$ uporządkować relacją $\prec$ tak, że każdy odcinek początkowy $\{a : a \prec b\}$ w tym porządku jest przeliczalny dla $b \in [0,1]$. Zauważyć, że zbiór

$$Z = \{(x,y) \in [0,1] \times [0,1] : x \prec y\}$$

nie spełnia twierdzenia Fubiniego, a więc nie jest mierzalny na płaszczyźnie.

Rozwiązanie:

Rozważmy funkcję χ_Z. Policzymy całki iterowane tej funkcji.

$$\int_{[0,1]} \left(\int_{[0,1]} \chi_Z(x,y)\, d\lambda(y) \right) d\lambda(x) =$$

$$\int_{[0,1]} \left[1 \cdot \underbrace{\lambda(\{y : x \prec y\})}_{1} \right] d\lambda(x) =$$

$$= \int_{[0,1]} 1 \, d\lambda(x) = 1 .$$

Z drugiej strony

$$\int_{[0,1]} \int_{[0,1]} \left(\chi_Z(x,y) \, d\lambda(x) \right) d\lambda(y) =$$

$$\int_{[0,1]} 1 \cdot \underbrace{\lambda(\{x : x < y\})}_{=0} \, d\lambda(y) =$$

$$= \int_{[0,1]} 0 \, d\lambda(y) = 0$$

Skoro χ_Z jest nieujemna, to nie może być mierzalna na płaszczyźnie rzeczywistej — inaczej jej całki iterowane musiałyby być równe, a właśnie pokazaliśmy, że tak nie jest.