Zad. 1 Przez $\mathcal{T}_\infty$ oznaczmy nową topologię

a) ~~Oczywiście~~ $\emptyset$

- $\emptyset \in \mathcal{T}_\infty$ oraz $X \in \mathcal{T}_\infty$ bo $X = X \setminus \emptyset$ zwarte
- Weźmy skończoną rodzinę zbiorów $\mathcal{Z}$ z $\mathcal{T}_\infty$. Wtedy jeśli ∞ jest we wszystkich zbiorach z $\mathcal{Z}$, to $\bigcap \mathcal{Z} = \{\infty\} \cup [(Y \setminus K_1) \cap \ldots \cap (Y \setminus K_n)]$ $= \{\infty\} \cup (Y \setminus (K_1 \cup \ldots \cup K_n))$. ~~Zbiory~~ Skończona suma zbiorów zwartych jest zwarta, więc $\bigcap \mathcal{Z} \in \mathcal{T}_\infty$. Jeśli ~~za~~ jest taki zbiór w $\mathcal{Z}$ do którego ∞ nie należy, to $\bigcap \mathcal{Z}$ jest przekrojem zbiorów otwartych w $\mathcal{T}_\infty$, więc $\bigcap \mathcal{Z} \in \mathcal{T}_\infty$ (zbiory zwarte w T_2 są domknięte, więc $Y \setminus K$ otwarte).

• Weźmy rodzinę $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{T}_\infty$. Jeśli $\infty \notin \bigcup \mathcal{Z}$, to oczywiście $\bigcup\mathcal{Z} \in \mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_\infty$. Jeśli $\infty \in \bigcup\mathcal{Z}$, to $\bigcup\mathcal{Z} = \{\infty\} \cup \bigcup\mathcal{Z}_\infty \cup \bigcup\mathcal{Z}_\emptyset$, gdzie $\mathcal{Z}_\infty$ to zbiory postaci $(Y\setminus K)$ dla pewnego K zwartego, a $\mathcal{Z}_\emptyset$ to reszta. Wtedy $\bigcup\mathcal{Z}_\infty = Y\setminus K$ dla pewnego K zwartego, a $\bigcup\mathcal{Z}_\emptyset$ to jakiś zbiór otwarty. Wtedy $K \setminus \bigcup\mathcal{Z}_\emptyset$ jest zbiorem zwartym, bo jest domkniętym podzbiorem zwartego zbioru, a zatem

$$\{\infty\}\cup\bigcup\mathcal{Z}_\infty\cup\bigcup\mathcal{Z}_\emptyset = \{\infty\}\cup(Y\setminus(K))\cup\bigcup\mathcal{Z}_\emptyset =$$

$$= \{\infty\}\cup\Big(Y\setminus\big(\underbrace{K\setminus\bigcup\mathcal{Z}_\emptyset}_{\text{zwarte}}\big)\Big)\in\mathcal{T}_\infty.$$

b) Weźmy $x, y \in X$. Jeśli $x \neq \infty \neq y$ to x możemy oddzielić od y bo $\mathcal{T}$ jest T_2.

Jeśli $x = \infty$, $y \in Y$, to z lokalnej zwartości $\mathcal{T}$ jest otoczenie y, że jego domknięcie jest zwarte (nazwijmy je K). Wtedy $x \in \{\infty\} \cup (Y \setminus \overline{K})$, $y \in K$, $K \cap \{\infty\} \cup (Y \setminus \overline{K}) = \emptyset$, oba zbiory są w topologii.

c) Niech $\mathcal{U}$ jest otwartym pokryciem X, czyli $\bigcup \mathcal{U} = X$. Wtedy jest taki $U \in \mathcal{U}$, że $\infty \in U$, stąd $U = \{\infty\} \cup (Y \setminus K)$ dla pewnego K zwartego. Skoro K zwarte, to z $\mathcal{U}$ możemy wybrać jego skończone pokrycie, które razem ze zbiorem U daje skończone pokrycie X.

c)

że zbiorem U daje [illegible] skończone pokrycie X.

c) $f : \mathbb{N}^+ \cup \{\infty\} \to \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^+\} \cup \{0\}$

$$f(n) = \begin{cases} \frac{1}{n} & n \neq \infty \\ 0 & n = \infty \end{cases}$$

f jest zanurzeniem uzwarcenia $\mathbb{N}$ w podprzestrzeń $(\mathbb{R}, d_e)$. Bijektywność jest jasna. Weźmy U otwarte w $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Jeśli $\infty \notin U$, to oczywiście $f[U]$ otwarte. W p.w. $U = \{\infty\} \cup (\mathbb{N} \setminus K)$, gdzie K jest zwarte, ale w l. naturalnych to jest równoważne skończoności K, zatem $f[U] = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^+\} \setminus \{\frac{1}{k} : k \in K\}$, co jest zbiorem otwartym, bo $\{\frac{1}{k} : k \in K\}$ jest domknięty.

zad. 2

a) ~~Dla~~ ~~Zaw~~ Bazą naszej przestrzeni mogą być "ciągi skończone" liczb naturalnych których jest przeliczalnie wiele.
Dokładniej, zbiór ~~N~~ singletonów $\{\{n\} \mid n \in \mathbb{N}\}$ jest bazą $\mathbb{N}$, więc zbiór

$$\{\{a_1\} \times \ldots \times \{a_n\} \times \mathbb{N} \times \ldots \mid a_n - \text{ciąg skończony}\}$$

jest bazą topologii produktowej $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.
Zbiory te są też otwarto-domknięte z dyskretności $\mathbb{N}$.

b) miejsca mają stałe

Rodzina $\{\{n\} \times \mathbb{N} \times \ldots \times \mid n \in \mathbb{N}\}$ jest pokryciem $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ ale nie możemy z niej wybrać skończonego pokrycia.

c) Zbiór ma puste wnętrze $\Leftrightarrow$ nie ma kuli zwartej w tym zbiorze.

Weźmy F zwarty oraz $a_n \in F$. Weźmy $r > 0$. Niech $k \in \mathbb{N}$ takie, że $\frac{1}{k} < r$. Wtedy ciągi, które na pierwszych k miejscach zgadzają się z a_n należą do $B(a_n, r)$, ale na pewno nie mogą wszystkie należeć do zwartego F dlatego, że możemy wśród nich wybrać ciąg który nie ma podciągu zbieżnego, np. $(\langle a_1, a_2, \ldots, a_k, n, a_{k+2}, \ldots \rangle)_{n=1}^{\infty}$

Odległość tych pkt od siebie jest stała.

d) Niech $f : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ określona wzorem

$$f(a_n) = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4 + \dots}}}$$

Wiemy, że ułamki łańcuchowe jednoznacznie wyznaczają liczby rzeczywiste, a ułamki o nieskończonym rozwinięciu odpowiadają liczbom rzeczywistym, więc z pewnością f jest bijekcją.

Chcemy pokazać ciągłość w dwie strony. Możemy zrobić to na zbiorach podbazowych.

Z tutorem rozmawiałem o podbazie, stąd to wiem.

Podbazą $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ są zbiory $\{[-\infty, a)$ oraz $(a, +\infty]$. Weźmy zbiór $(a, +\infty]$. Niech $f(a_n) = a$. Wtedy

$$f^{-1}[(a, +\infty]] = \{\langle a_1, a_2, \dots, a_k, n, b_1, \dots \rangle |$$

$n < a_{k+1}, b_1 \in \mathbb{N}\} \cup \{\langle n, b_1, \dots \rangle \mid n > a_1, b_1 \in \mathbb{N}\}$.

Zatem są to ~~zbiory~~ ciągi, które w ~~pewnym miejscu~~ pierwszym miejscu w którym różnią się z a_n mają mniejszą wartość (wtedy ułamek jest większy), lub ~~só~~ są większe już na pierwszym miejscu (wtedy część całkowita jest większa).

Zauważmy, że ten zbiór jest sumą zbiorów bazowych postaci $\{n\} \times \mathbb{N} \times \dots$, $n > a_1$ oraz $\{a_1\} \times \dots \times \{a_k\} \times n \times \mathbb{N} \times \dots$, $n < a_{k+1}$, zatem jest otwarty. Analogicznie pokazujemy otwartość $[-\infty, a)$, zamienią się tylko nierówności.

W drugą stronę — weźmy zbiór bazowy $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, czyli $\{a_1\}\times\ldots\times\{a_k\}\times\mathbb{N}\times\ldots$ dla pewnego ciągu $a_1,\ldots,a_k$.

Wtedy
$$f[\{a_1\}\times\ldots\times\{a_k\}\times\mathbb{N}\times\ldots] = \left\{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\ddots\cfrac{}{a_k+\cfrac{1}{b_1+\ddots}}}}\ \middle|\ b_i\in\mathbb{N}\right\}.$$

~~ten zbiór to~~ Niech

$$a = a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\ddots\cfrac{}{a_k}}} \cancel{= a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_t+\ddots\cfrac{}{a_k}}}} \in \mathbb{Q}$$

oraz

oraz

$$b = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{\ddots}{a_k + 1}}} \in \mathbb{Q}$$

Wtedy liczby z obrazu są z zakresu (a, b) i każda liczba z zakresu (a, b) jest osiągana,

Zatem f jest ciągła też w tę stronę!

($\{(a, b) \cap \mathbb{Q} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ jest inną bazą $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.)