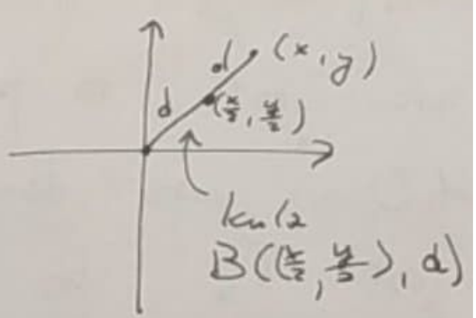
zad. 1

Przestrzeń metryczna jest ośrodkowa iff ma przeliczalną bazę.
$(\mathbb{R}^2, d_c)$ nie może mieć przeliczalnej bazy, chociażby dlatego, że ~~w~~ do topologii należą takie odcinki z punktu $(0,0)$ do ~~...~~ punktu o dowolnych współrzędnych.



---

zad. 2

Nie, chociażby dlatego, że $\mathbb{R}$ jest zupełne, a $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ nie jest. Np. ciąg $\left(\frac{\pi}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ w $\mathbb{R}$ zbiega do 0, a w $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ nie jest zbieżny.

---

zad. 3

Nie, przekształcenie ciągłe przeprowadza zbiory zwarte na zbiory zwarte, $[0,1]$ jest zwarte, a $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ nie jest.

---

zad. 4 TAK

~~zad. 4~~

zad. 5

Przykład z wikipedii ze ściągi:

Naturalna topologia na $[0,1]$ rozszerzona o zbiór $[0,1] \setminus \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^+\}$ (oczywiście domykamy to na skończone przekroje i dowolne sumy). W takim razie nie jest to przestrzeń T_3, bo * nie oddzielimy punktu 0 oraz domkniętego zbioru $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^+\}$, ale jest T_2, bo możemy postępować jak dla zwykłej topologii na $[0,1]$

* 0 jest punktem skupienia ciągu $(\frac{1}{n})_{n=1}^{\infty}$, więc każde otoczenie 0 ma jakieś niepuste przecięcie z tym zbiorem.

zad. 6

Nie, $\mathbb{Q}$ nie jest metryzowalne w sposób zupełny (to chyba było któreś zadanie na liście), a ~~$\mathbb{R}$~~ jest podprzestrzenią zupełnej przestrzeni $\mathbb{R}$. ..

zad. 7

Nie, funkcja $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ jest nieciągła, a jej wykres domknięty.

zad. 8

~~Tak. Weźmy punkt $(x, f(x)) \in G(f)$.~~
~~Weźmy punkt $\varepsilon > 0$.~~

Tak jest, weźmy x_0 i $x_n \to x_0$, wtedy z domkniętości $(x_n, f(x_n)) \to (x_0, f(x_0)) \in G(f)$, ~~dla pewno~~

dla pewnego ciągu x_n ...

zad. 9

TAK, przestrzeń $\left(\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^+\right\} \cup \{0\}, d_e\right)$, jest zupełna i całkowicie ograniczona, więc zwarta.

zad. 10

~~Zbiór~~ ~~liczby~~ NIE. ~~Na pewno jest taki punkt x_0, że dla pewnych $r_1, r_2 > 0$ zachodzi $B(x_0, r_1) = B(x_0, r_2)$~~, inaczej ~~przestrzeń byłaby~~ Żeby przestrzeń metryzowalna była spójna i przeliczalna, to punkty muszą być „zbite” i przeliczalność tego nie da.

zad. 11

Tak, bo otwarto-domknięte zbiory takiej przestrzeni to jedynie cała przestrzeń i $\emptyset$.

zad. 12

~~Okrąg jednostkowy~~. Zbiór Cantora w odcinku $[0, 1]$.