# ANALIZA L13Z12*

KACPER SOLECKI

**L13z12*.** Rozważmy funkcję

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4+y^2} \text{ gdy } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ gdy } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Dla $(x,y) \neq (0,0)$: $f(0,y) = 0$, $f(x,x^2) = \frac{1}{2}$, więc $f$ jest nieciągła w $(0,0)$.

*1).* $f$ ma wszystkie pochodne kierunkowe w punkcie $(x,y) = (0,0)$:
Niech $v = (x_0, y_0), y_0 \neq 0$. Pochodna kierunkowa w kierunku $v$:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\frac{x_0^2h^2y_0h}{x_0^4h^4+y_0^2h^2} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x_0^2y_0}{x_0^4h^2 + y_0} = \frac{x_0^2}{y_0}$$

Dla $y_0 = 0$ pochodna jest oczywiście równa 0 - na prostej $y = 0$
$f$ jest stale równa 0.

*2).* $f$ ma wszystkie pochodne kierunkowe poza tym punktem:
Niech $v = (x_0, y_0)$. Pochodna kierunkowa w punkcie $(x,y)$, w kierunku $v$:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\frac{(x+x_0h)^2(y+y_0h)}{(x+x_0h)^4+(y+y_0h)^2} - \frac{x^2y}{x^4+y^2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^2y + 2x_0yh + x^2y_0h + O(h^2)}{x^4h + y^2h + O(h^2)} - \frac{x^2y}{x^4h+y^2h} =$$

$$= \frac{2x_0y + x^2y_0}{x^4+y^2}$$

*Date*: June 2020.