~~$B = \{[1,2,3,4],[9,-1,-1,-1,2$~~

~~[~~

zad. 1

~~$B = \{[9,-1,-1,-1],[2,-1,0,0$~~

$B = \{[3,0,-1,0],[2,-1,0,0],$
$[4,0,0,-1]\}$ jest bazą V.

~~Z~~ Skorzystamy z ortogonalizacji Grama-Schmidta.

$e_1 = [3,0,-1,0]\cdot\frac{1}{\sqrt{10}}$

$e_2' = [2,-1,0,0] - \frac{1}{10}([2,-1,0,0]\,|\,[3,0,-1,0])[3,0,-1,0] =$

$= [2,-1,0,0] - \frac{6}{10}[3,0,-1,0] = \cancel{[-18,-1,6,0]}$
$[\frac{1}{5},-1,\frac{3}{5},0]$

$\|e_2'\| = \sqrt{\frac{1}{25}+1+\frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{35}{25}} = \frac{\sqrt{35}}{5}$

$e_2 = \frac{e_2'}{\frac{\sqrt{35}}{5}}$

$e_3' = [4,0,0,-1] - \frac{1}{10}([4,0,0,-1]\,|\,[3,0,-1,0])[3,0,-1,0] -$
$- \frac{25}{35}([\frac{1}{5},-1,\frac{3}{5},0]\,|\,[4,0,0,-1])[\frac{1}{5},-1,\frac{3}{5},0] =$

$= [4,0,0,-1] - \frac{6}{5}[3,0,-1,0] - \frac{5}{7}\cdot\frac{4}{5}\cdot[\frac{1}{5},-1,\frac{3}{5},0] =$

$= [4 - \frac{18}{5} - \frac{4}{35}, \frac{4}{7}, \frac{6}{5} - \frac{12}{35}, -1] = [\frac{10}{35}, \frac{4}{7}, \frac{30}{35}, -1] =$

$= \left[\frac{2}{7}, \frac{4}{7}, \frac{6}{7}, -1 \right]$

$$\|e_3'\| = \sqrt{\frac{4}{49} + \frac{16}{49} + \frac{36}{49} + 1} = \sqrt{\frac{105}{49}}$$

$$e_3 = \frac{e_3'}{\|e_3'\|} = \frac{7}{\sqrt{105}} \cdot \left[\frac{2}{7}, \frac{4}{7}, \frac{6}{7}, -1 \right].$$

Odp. Baza ortonormalna V jest np.

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{10}}[3,0,-1,0], \frac{5}{\sqrt{35}}\left[\frac{1}{5}, -1, \frac{3}{5}, 0\right], \frac{7}{\sqrt{105}}\left[\frac{2}{7}, \frac{4}{7}, \frac{6}{7}, -1\right] \right\}.$$

zad. 2

$$\begin{cases} c_1 = 2b_1 + b_2 \\ c_2 = -b_1 - b_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1 = c_1 + c_2 \\ b_2 = -c_1 - 2c_2 \end{cases}$$

$$m^B_C(\mathcal{A}) = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$, czyli

$$m^B_C(\mathcal{A})[v]_B = [\mathcal{A}v]_C$$

$$m^B_C(\mathcal{A}) = m^{\mathcal{E}}_C(\mathcal{A})\, m^B_C(\mathcal{E})$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Macierz przejścia z C do B, więc to macierz której kolumnami są wsp. wektorów bazy B w bazie C

Znajdźmy $m^C_B(\mathcal{E}) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}^{-1}$

$\cancel{\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}} = [$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ -[1] \end{array} \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{c} +[2] \\ \\ \end{array} \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

Zatem $m^C_B(\varepsilon) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

$$m^C_C(\mathcal{A}) = m^B_C(\mathcal{A})\, m^C_B(\varepsilon) = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -5 \\ 9 & -7 \end{bmatrix}$$

$m^C_C(\mathcal{A}^{-1}) = m^C_C(\mathcal{A})^{-1}$. Znajdźmy to!

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 6 & -5 & 1 & 0 \\ 9 & -7 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} \cdot 3 \\ \cdot 2 \end{array} \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 18 & -15 & 3 & 0 \\ 18 & -14 & 0 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ -[1] \end{array} \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 18 & -15 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{c} +15[2] \\ \\ \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 18 & 0 & -42 & 30 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{c} :18 \\ \\ \end{array} \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2\frac{1}{3} & 1\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{array}\right]$$

$$m^{C}_{C}(A^{-1}) = \begin{bmatrix} -2\frac{1}{3} & 1\frac{2}{3} \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$m^{B}_{C}(A^{-1}) = m^{C}_{C}(A^{-1}) \cdot m^{B}_{C}(\varepsilon) =$$

$$= \begin{bmatrix} -2\frac{1}{3} & 1\frac{2}{3} \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

zad. 4

a) $B(P(x)) = [(x+1)P(x)]' = P(x) + (x+1)P'(x)$

$B(P(-1)) = P(-1) + (-1+1)P'(-1)$

Jeśli $P \in W$, to wtedy $B(P(-1)) = 0$

$\Downarrow$

$B(P(-1)) \in W$

$\Downarrow$

$BW \subset W$.

b) $P(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$

$P \in W \iff -a + b - c + d - e + f = 0$

$\Downarrow$

$\dim W = 5$.

Wektor $[b, c, d, e, f]$ jednoznacznie wyznacza ~~wektor~~ wielomian z W.

bazą W wtedy może być ~~$[1, \dots 0]$~~, bazę standardowe. ~~Wtedy m~~

Wróćmy jeszcze na chwilę do $\mathbb{R}_5[X]$.

Rozpiszmy dokładniej B.

$$B(P(x)) = B(ax^5+bx^4+\ldots+f) =$$

$$= ax^5+\ldots+f+(x+1)(5ax^4+4bx^3+\ldots+e) =$$

$$= 6ax^5+5bx^4+\ldots+2ex+f+5ax^4+\ldots+e =$$

$$= 6ax^5+5(a+b)x^4+\ldots+2(e+d)x+e+f$$

Zatem w bazie standardowej macierz B wygląda tak:

$$a = b-c+d-e+f$$

$$B\cdot P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ & & 3 & 3 & 0 & 0 \\ & & & 4 & 4 & 0 \\ & 0 & & & 5 & 5 \\ & & & & & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f \\ e \\ d \\ c \\ b \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e+f \\ 2(e+d) \\ 3(d+c) \\ 4(b+c) \\ 5(a+b) \\ 6a \end{bmatrix}.$$

W przestrzeni W a zależy liniowo od reszty wsp., więc macierz w bazie standardowej jest

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \\ 5 & -5 & 5 & -5 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f \\ e \\ d \\ c \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e+f \\ 2(e+d) \\ 3(c+d) \\ 4(b+c) \\ 5(b+(b-c+d-e+f)) \end{bmatrix}$$

Zatem $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \\ 5 & -5 & 5 & -5 & 10 \end{vmatrix} =$

$$= (-1)^{10}\cdot 10 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^{9}\cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 5 & -5 & 5 & -5 \end{vmatrix} =$$

$$= 10\cdot(1\cdot 2\cdot 3\cdot 4) - 4\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 5 & -5 & 5 & -5 \end{vmatrix} =$$

$$= 240 - 4\left((-1)^{8}(-5)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{7}\cdot 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 5 & -5 & 5 \end{vmatrix}\right) =$$

$$= 240 - 4\left(-5\cdot(1\cdot 2\cdot 3) - 3\left(10+10-(-10)\right)\right) =$$

$$= 240 - 4\cdot(-30-90) = 720$$

Zad. 5

a) $\operatorname{Im} A \supset \operatorname{Im} A^2 \supset \ldots \supset \operatorname{Im} A^7 = \{0\}.$

$$\operatorname{Im} A^6 \neq \{0\}$$

Zatem $\operatorname{Im} A^p \cap \ker A \neq \{0\}$ dla $p<7$.

Gdyby tak nie było, to ~~dla~~ jakiego stopień nilpotentności A byłby mniejszy od 7. W szczególności

$$\operatorname{Im} A^5 \cap \ker A \neq \{0\}.$$

~~b) Zatem~~ ~~Łatwiej nie uprost, że $\dim \ker A < \frac{n}{7}$.~~

~~Zatem $\dim \ker A \geqslant \frac{\dim V}{7} = \frac{n}{7}$~~ $\blacksquare$

b) Z wykładu wiemy, że

$$7 \cdot \dim \ker A \geqslant \sum_{i=1}^{7} \dim(\operatorname{Im} A^{i-1} \cap \ker A) = \underbrace{\sum_{i=1}^{7} \dim \ker A^{i} - \dim \ker A^{i-1}}_{= \dim V}$$

Zatem $\dim \ker A \geqslant \frac{\dim V}{7} = \frac{n}{7}$. $\blacksquare$

zad. 6 $\mathbb{K} = \{0, 1, 2\}, \quad 2^{-1} = 2.$

$$|V| = 3^5 = 243$$

$$|W| = 3^2 = 9$$

$$|\mathcal{L}(V)| = \# \text{baz } V$$

Automorfizm przeprowadza jedną bazę na inną, zatem automorfizm możemy utożsamiać z funkcją z bazy standardowej w inną bazę, przy czym kolejność wektorów bazowych ma znaczenie.

Cho...

... ma znaczenie.

Chcemy zatem policzyć ile jest uporządkowanych baz przestrzeni V.

b_1 możemy wybrać na $|V|-1$ sposobów (bez 0).

b_2 możemy wybrać na $\cancel{|V|-1}$ $|V|-3$ sposobów (są 3 wektory (z. z b_1))

b_3 możemy wybrać na $|V|-9$ sposobów (jest 3^2 wektorów (z. od b_1, b_2))

b_4 na $|V|-27$ sposobów

b_5 na $|V|-81$ sposobów.

Zatem $|\mathcal{L}(V)| = (|V|-1)(|V|-3)\ldots(|V|-81)$

Ustalmy jakąś bazę W i dopełnijmy ją do bazy V.

Czyli $\langle b_1, b_2 \rangle = W$, $\langle b_1, b_2, \ldots, b_5 \rangle = V$.

Pytamy ile jest takich automorfizmów, że przeprowadzają b_1, b_2 na parę lnz. wektorów W.

(skoro W ma być niezmiennicze, to automorfizm A spełnia $AW = W$).

Lnz. par c_1, c_2 takich, że $\langle c_1, c_2 \rangle = W$ jest $(|W|-1)\cdot(|W|-3)$ z podobnego argumentu co przy liczeniu mocy $\mathcal{L}(V)$.

Chcemy dopełnić tę parę do jakiejś bazy V, czyli wybrać jeszcze 3 lnz. wektory.

c_3 możemy wybrać na $|V|-9$ sposobów, c_4 na $|V|-27$, a c_5 na $|V|-81$.

(znów ten argument co wcześniej).

... argument ... w cześniej).

Prawdop. tego, że losowo wybrane $A \in \mathcal{L}(V)$ przeniesie $b_1, b_2, \dots, b_5$ na jakieś $c_1, c_2, \dots, c_5$ wynosi

$$\frac{\#\text{ baz takich, że pierwsze 2 elementy bazy są bazą } W}{|\mathcal{L}(V)|} = \frac{(|W|-1)(|W|-3)(|V|-9)(|V|-27)(|V|-81)}{(|V|-1)(|V|-3)\cdots(|V|-81)} =$$

$$= \frac{(|W|-1)(|W|-3)}{(|V|-1)(|V|-3)} = \frac{8\cdot 6}{242\cdot 240} = \frac{6}{242\cdot 30} = \frac{1}{242\cdot 5} =$$

$$= \frac{1}{1210}$$